



DIVISIÓN DE  
CIENCIAS BÁSICAS  
E INGENIERÍA

## Maestría en Ciencias de la Computación

### **Reconstrucción tomográfica de descargas eléctricas en gases y caracterización de las mismas**

### Proyecto de Investigación I

Antonio García Amaya

Dirigido por:

Dr. Carlos Avilés Cruz

Dr. José Luís Hernández Ávila

México, D.F., Abril 2007

# Contenido

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>3</b>
<b>2. PROBLEMÁTICA.....</b>	<b>5</b>
<b>3. METODOLOGÍA.....</b>	<b>7</b>
<b>4. ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>8</b>
<b>5. FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>14</b>
5.1 ADQUISICIÓN DE IMÁGENES .....	14
5.2 SINCRONIZACIÓN DE IMÁGENES.....	15
5.3 PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES .....	15
5.3.1 <i>Pre-procesamiento o acondicionado de la imagen</i> .....	15
5.3.2 <i>Modelos de color</i> .....	16
5.3.3 <i>Conversión a grises</i> .....	17
5.3.4 <i>Operaciones morfológicas sobre imágenes</i> .....	17
5.3.5 <i>Segmentación</i> .....	21
5.3.6 <i>Técnicas basadas en umbralado</i> .....	22
5.3.7 <i>Filtro para imágenes en color</i> .....	22
5.4 RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA .....	23
5.5 RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIE POR MALLAS.....	26
5.6 MÉTODO DE LAS MALLAS SIMPLEX.....	28
5.6.1 <i>Dualidad con las triangulaciones</i> .....	30
5.6.2 <i>Contornos</i> .....	33
5.6.3 <i>Transformación de la malla</i> .....	33
5.6.4 <i>Geometría de las mallas simplex</i> .....	34
5.7 ESTRUCTURAS FACE-VERTEX .....	37
5.8 OBJETOS FRACTALES .....	38
5.8.1 <i>El concepto de fractal</i> .....	39
5.8.2 <i>Geometría fractal</i> .....	43
5.8.3 <i>El exponente de Hurst y la estructura fractal</i> .....	44
5.8.4 <i>Dimensión fractal</i> .....	45
<b>6. IMPLEMENTACIÓN.....</b>	<b>46</b>
6.1 ADQUISICIÓN DE IMÁGENES .....	46
6.2 SINCRONIZACIÓN DE IMÁGENES.....	46
6.3 PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES .....	47
6.4 RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA .....	47
6.5 REALCE .....	48
6.6 OPTIMIZACIÓN PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIE POR MALLAS .....	50
6.7 MALLAS SIMPLEX .....	51
<b>7. AVANCES DEL PROYECTO Y TRABAJO FUTURO .....</b>	<b>54</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>55</b>

## Índice de figuras

FIGURA 2.1	LA RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA.....	5
FIGURA 2.2	RECONSTRUCCIÓN DE DESCARGA ELÉCTRICA SIN OPTIMIZACIÓN.....	6
FIGURA 3.1	DIAGRAMA DE FLUJO DE ETAPAS DE PROYECTO.....	7
FIGURA 5.1	ESQUEMA DE CAPTURA INDEPENDIENTE CON DOS VIDEOCÁMARAS.....	14
FIGURA 5.2	UN ELEMENTO ESTRUCTURAL ENCAJANDO EN UNA POSICIÓN Y NO ENCAJANDO EN OTRA.....	17
FIGURA 5.3	(A) UNA IMAGEN SENCILLA. (B) Y (C) DOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES DIFERENTES. (D) Y (E) EROSIONES RESPECTIVAS DE (A).....	19
FIGURA 5.4	(A) UNA IMAGEN SENCILLA. (B) Y (C) DOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES DIFERENTES. (D) Y (E) DILATACIONES RESPECTIVAS DE (A).....	19
FIGURA 5.5	(A-D) EFECTOS DE LA APLICACIÓN DE UNA APERTURA SOBRE UNA IMAGEN.....	21
	(E-H). EFECTOS DE LA APLICACIÓN DE UNA CERRADURA SOBRE UNA IMAGEN.....	21
FIGURA 5.6	PROYECCIÓN $P_0$ DE UN OBJETO.....	24
FIGURA 5.7	RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA DE UN OBJETO A PARTIR DE SUS PROYECCIONES LATERAL Y SUPERIOR.....	25
FIGURA 5.8	RECONSTRUCCIÓN DE UN CILINDRO REAL POR ISOSUPERFICIES.....	25
FIGURA 5.9	EJEMPLOS DE P-CÉLULAS $0 \leq p \leq 3$ .....	29
FIGURA 5.10	CUATRO MALLAS 2-SIMPLEX GENÉRICAS.....	30
FIGURA 5.11	DUALIDAD ENTRE K-TRIANGULACIONES ( $k=1,2$ ) DIBUJADAS CON LÍNEAS CONTINUAS Y CÍRCULOS SÓLIDOS, Y MALLAS K-SIMPLEX DIBUJADAS CON LÍNEAS INTERMITENTES Y CUADRADOS COMO VÉRTICES. DOS PRIMERAS SON TRIANGULACIONES SIN FRONTERAS Y LAS OTRAS DOS TIENEN FRONTERAS.....	31
FIGURA 5.12	DOS CONTORNOS DEFINIDOS EN UNA MALLA 2-SIMPLEX. EL DE MÁS A LA DERECHA DELIMITA UNA CARA DE LA MALLA.....	33
FIGURA 5.13	(A) LOS DOS OPERADORES EULERIANO $T_1^2$ y $T_2^2$ DEFINIDOS EN MALLAS SIMPLEX; (B) LOS DOS META-OPERADORES $T_3^2$ y $T_4^2$ ; (C) EL OPERADOR DE CONMUTACIÓN DE SEGMENTO $T_7^2$ .....	34
FIGURA 5.14	(A) LA ESFERA CIRCUNSCRITA $S_2$ DE RADIO $R_1$ Y EL CÍRCULO CIRCUNSCRITO $S_1$ DE RADIO $R_1$ . B) PROYECCIÓN DE (A) EN EL PLANO $(O_1, C_1, P_1)$ . EL ÁNGULO SIMPLEX PUEDE SER INTERPRETADO COMO UN ÁNGULO DE GEOMETRÍA PLANAR.....	35
FIGURA 5.15	EJEMPLO DE UNA ESTRUCTURA FACE-VERTEX.....	37
FIGURA 5.16	DEFINIENDO VÉRTICES DEL POLÍGONO PARA INDICAR DIRECCIÓN DE LA NORMAL.....	37
FIGURA 5.17	EFECTOS DE ILUMINACIÓN EN UNA ESFERA.....	38
FIGURA 5.18	COBERTURA CON CUADRADOS DE TAMAÑO R PARA OBTENER LA MEDICIÓN DE UNA CURVA.....	39
FIGURA 5.19	DIVISIÓN DE UNA LÍNEA EN DOS, PRODUCIENDO ASÍ DOS REPLICAS TOPOLÓGICAS.....	40
FIGURA 5.20	DIVISIÓN DE LOS LADOS DE UN CUADRADO, PRODUCIENDO ASÍ CUATRO RÉPLICAS TOPOLÓGICAS.....	40
FIGURA 5.21	COSTA DE GRAN BRETAÑA.....	42
FIGURA 5.22	SE MUESTRA LA RELACIÓN LINEAL DE LA LONGITUD DE DIFERENTES COSTAS.....	42
FIGURA 5.23	EJEMPLO DE FRACTALES A) AUTOSIMILAR B) AUTOAFÍN.....	43
FIGURA 6.1	CIRCUITO SENCILLO DE GENERACIÓN DE HAZ DE LUZ.....	46
FIGURA 6.5	PROYECCIÓN LATERAL Y SUPERIOR DE UN OBJETO.....	47
FIGURA 6.6	RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA DE IMÁGENES DE TRABAJO.....	48
FIGURA 6.7	RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA DE IMÁGENES DE TRABAJO APLICANDO REALCE.....	49
FIGURA 6.8	RECONSTRUCCIÓN POR ISOSUPERFICIES DE LA RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA TRATADA CON REALCE.....	49
FIGURA 6.9	EFECTO DE APLICAR ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN A LA RECONSTRUCCIÓN.....	51
FIGURA 6.10	OBTENCIÓN DE LISTA DE PÍXELES QUE FORMAN A UN CORTE TRANSVERSAL.....	52
FIGURA 6.11	OBTENCIÓN DE CUATRO LISTAS PARA FORMAR POLIGONOS QUE FORMAN A LA MALLA.....	52
FIGURA 6.12	RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIE POR MALLEO SIMPLEX.....	53
FIGURA 6.13	AGREGANDO COLOR E ILUMINACIÓN AL WIREFRAME.....	53

# 1. Introducción

Los seres humanos tenemos la tendencia a buscar patrones y formas regulares en el mundo que nos rodea; el caos nos incomoda. Para nosotros, las estrellas se agrupan en constelaciones con formas mitológicas. Las nubes se transforman en barcos trasatlánticos, monstruos y dragones que cruzan el azul del cielo. Las formas geométricas nos fascinan, puesto que de alguna manera su simetría nos despierta sensaciones de paz y armonía. Nuestra gran debilidad por las formas y patrones regulares en ocasiones nos engaña. Por ejemplo, la constante interacción con plantas y animales nos ha enseñado a reconocer que hay cierta complejidad en su estructura que parece hacerlos únicos. Son simétricos, pero no perfectos. Son similares unos a otros, particularmente si se trata de la misma especie, pero no idénticos.

Esa inquietud nos ha llevado a generar modelos que reproduzcan un objeto o algún comportamiento, uno de ellos son los fractales, que son formas geométricas extrañas pero con características bien definidas. Se trata de objetos autosimilares, pues son idénticos o muy parecidos a sí mismos a toda escala. Esto quiere decir que si cortamos una de sus partes y la ampliamos, o si la exploramos con una lupa, la estructura que veremos será idéntica (o muy similar) a la figura total. Si repetimos el procedimiento con los fragmentos de una parte el resultado será de nuevo una copia del original, y así *ad infinitum*. Los fractales que encontramos en la naturaleza ciertamente no son tan “obsesivos”, pues su autosimilaridad es limitada: las partes se parecen al total pero sólo en términos estadísticos y hay un nivel de ampliación en el que la similaridad desaparece.

Un considerable número de formas en la naturaleza tienen estructuras ramificadas. La existencia de ramas que nacen de otras ramas es muchas veces, aunque no siempre, indicativa de la presencia de formas fractales. Algunas de estas estructuras parecen ser resultado de un proceso muy simple de agregación que involucra la difusión azarosa de objetos o sustancias. Lo más sorprendente es que una gran variedad de sistemas naturales, desde depósitos de polvo y minerales, hasta agregados de vasos capilares en el ojo y algunas colonias de bacterias, tienen estructuras ramificadas que revelan la existencia de mecanismos de formación que comparten rasgos en común.

Cuando una piedra golpea un vidrio se desencadena una serie de procesos que muchos consideran fascinantes. Si se forma una fractura, ésta crece en menos de una millonésima de segundo a una velocidad cercana a los 200 metros por segundo. Esta pequeña quebradura adquiere más velocidad entre más crece hasta que alcanza un punto en el que el vidrio cede y de la fractura original se disparan cientos de quebraduras en múltiples direcciones, y de éstas otras y así sucesivamente. El resultado final podemos imaginarlo: una estructura fractal si el vidrio se sostiene.

La formación de estructuras fractales en materiales quebradizos como el vidrio es más común de lo que uno se imagina. La estructura de estas fallas y fracturas es muy parecida a las formas que se generan cuando una descarga eléctrica atraviesa un material aislante.

Fenómenos como éstos normalmente se estudian utilizando modelos denominados de “rompimiento de dieléctrico”.

Este proyecto lo hemos dirigido al estudio de las descargas eléctricas de manera que sean analizadas en base a sus características fractales. Ya se han hecho estudios similares, sin embargo en ellos, se han analizado las propiedades fractales a partir de simulaciones o de imágenes en 2D. En cambio, en el proyecto que propusimos y en que en el presente escrito mostramos sus avances, vamos a obtener las propiedades fractales de la descarga a partir de imágenes en 3D, las cuales son obtenidas de una reconstrucción tridimensional, es decir de una tomografía. Este tipo de estudio es innovador en el estudio de descargas puesto que esta herramienta computacional no es muy frecuentemente usada en el área de investigación eléctrica.

Existe un trabajo el cual sienta un precedente, en él se mostró una descarga eléctrica en 3D utilizando técnicas de reconstrucción tomográfica, sin embargo hay muchas cosas que mejorar y otras que estudiar puesto que este tipo de modelos no han sido explorados.

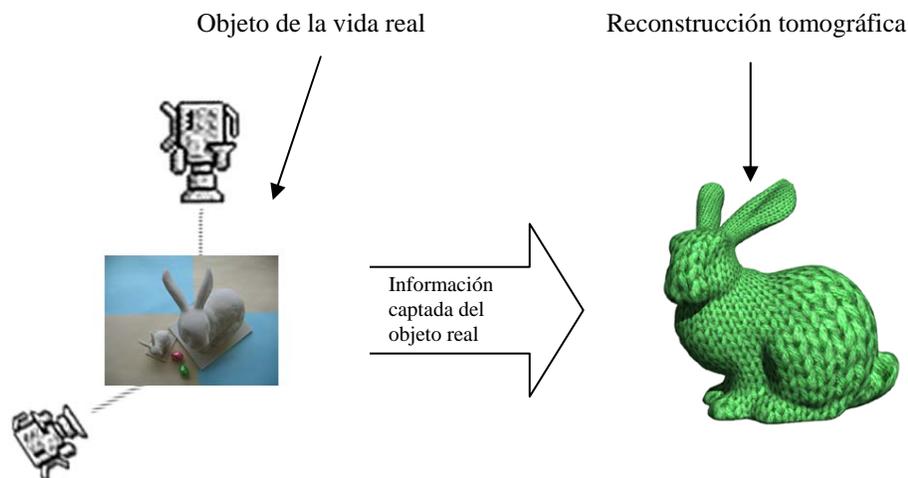
Por ejemplo; aspectos entre los que deben mejorarse está reducir la densidad de malleo; es decir, con un número menor de polígonos representar nuestra descarga sin que existan pérdidas cualitativas y con ello exista una mayor eficiencia computacional. Otro aspecto es emplear bibliotecas de graficación 3D que utilicen la tarjeta de video para aumentar la velocidad con que es mostrada la reconstrucción tridimensional en la pantalla de la PC.

A lo largo del reporte mostraremos la metodología utilizada para hacer la reconstrucción tridimensional de la descarga, la extracción de parámetros del modelo 3D y la propuesta del modelo matemático que describa la propagación de la descarga.

## 2. Problemática

Como ya hemos mencionado, el interés de este proyecto está enfocado al estudio de las descargas eléctricas basándose en la reconstrucción de las mismas.

Para hacer la reconstrucción haremos uso de las técnicas tomográficas. La reconstrucción tomográfica es el proceso de generar un modelo (normalmente 3D) que representa a un objeto de la vida real, haciendo uso de información obtenida del mismo (ver figura 2.1) Generalmente esta información se presenta a través de proyecciones (2D) que se han tomado del objeto, a través de algún medio electrónico y/o mecánico.

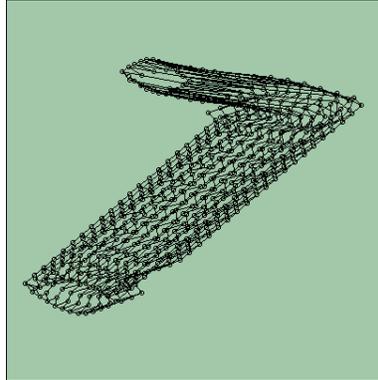


**Figura 2.1** La reconstrucción tomográfica.

Posteriormente, cuando se tengan las reconstrucciones, se procederá a obtener parámetros físicos y estadísticos de la descarga, y al revisar el comportamiento de esos parámetros se planteará un modelo matemático con el cual se podrá describir la propagación de la descarga.

Para mostrar la reconstrucción de la descarga en pantalla serán utilizadas las *mallas simplex*, las cuales tienen la característica de adaptarse a cualquier objeto independientemente de su topología.

De un trabajo precedente sabemos que existe una cantidad muy grande de polígonos que representan a la descarga (ver figura 2.2), la cual podría ser disminuida porque hay secciones del canal en donde no existen grandes variaciones; es decir, el canal de la descarga se mantiene recto, por ello también mejoraremos este aspecto, el criterio que se seguirá será una optimización por gradiente.



**Figura 2.2** Reconstrucción de descarga eléctrica sin optimización.

Una vez optimizadas las mallas, haremos uso del potencial de la tarjeta de video para la graficación 3D utilizando las bibliotecas de OpenGL.

Las descargas eléctricas, al igual que otros fenómenos de índole eléctrico, son sucesos que, dada su naturaleza, pueden reflejar el entorno en el que se está presentando. Este fenómeno lo podemos ver en la vida real, en ejemplos tales como los relámpagos de las tormentas, en las cercas electrificadas, en el encendido de electrodomésticos.

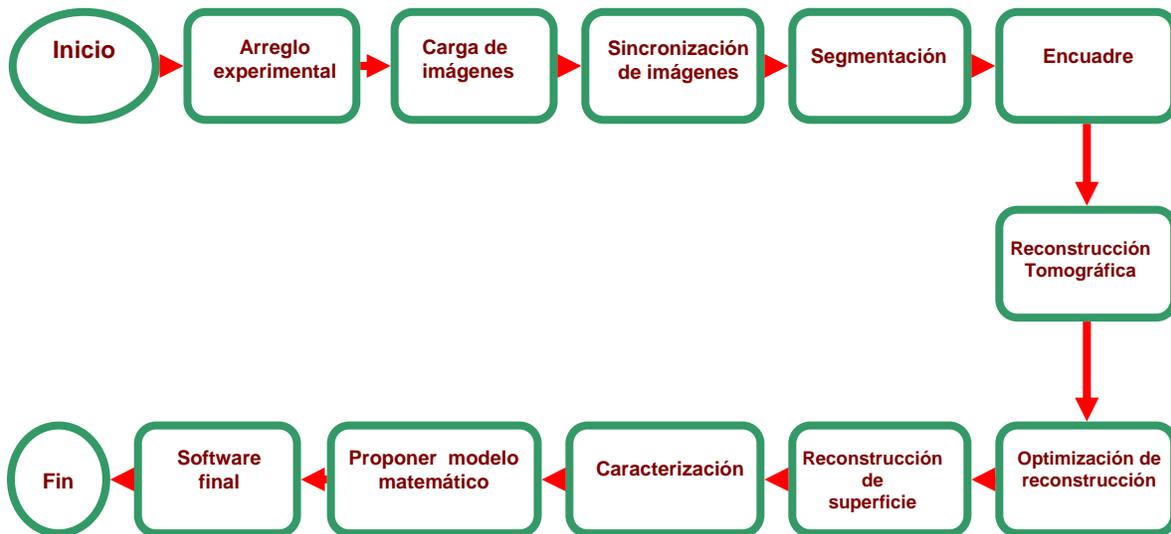
Otro ejemplo se encuentra en las líneas de alta tensión, que presentan fallas eléctricas por la generación de arcos voltaicos entre los cables. Éstos entre otros motivos, se dan cuando los agricultores realizan la quema de sus siembras, que provocan un aumento en las partículas suspendidas en el aire entre los cables, lo cual facilita la ionización del ambiente.

En este proyecto se caracterizan y modelan las descargas eléctricas, ello nos permitirá conocer el comportamiento de los arcos eléctricos en las líneas de alta tensión y, por tanto, definir las características del ambiente para que no se produzcan y se eviten fallas en el suministro de energía.

Entonces, el presente trabajo se justifica puesto que contribuye con una manera distinta de caracterizar y modelar las descargas eléctricas, y así una nueva alternativa para comprender su comportamiento.

### 3. Metodología

Hemos presentado un esbozo de la problemática a resolver, ahora de manera más específica y sistematizada mostraremos cada una de las tareas a desarrollar en el proyecto, el siguiente diagrama de flujo nos muestra cada una de las etapas que lo comprenden.



**Figura 3.1** Diagrama de flujo de etapas de proyecto.

Daremos aquí una descripción breve de cada una de las etapas del proyecto, cada una de ellas será explicada en mayor detalle a lo largo de este trabajo.

*Arreglo experimental:* Se monta el arreglo eléctrico y se hacen pruebas con distintos voltajes, distancias de electrodos y gases, con ello obtener las descargas deseadas.

*Carga de imágenes:* Se hace el montaje del arreglo de cámaras.

*Sincronización de imágenes:* Se hace lo necesario para aislar de los videos las imágenes de la descarga en el mismo instante.

*Segmentación:* Se aísla la región donde ocurre la descarga.

*Encuadre:* Se hace un ajuste en las imágenes de manera que puedan ser llevadas al algoritmo de reconstrucción.

*Reconstrucción tomográfica:* Se aplica el algoritmo de reconstrucción para obtener el modelo 3D.

*Optimización de reconstrucción:* En esta etapa se aplica un algoritmo de optimización, con el cual se hará una reducción en la densidad de malleo.

*Reconstrucción de superficie:* Se aplica el algoritmo de reconstrucción de superficies por mallas simplex.

*Caracterización:* Se obtienen parámetros eléctricos, estadísticos y fractales de la descarga.

*Modelo matemático:* Se propone un modelo de propagación basado en la dimensión fractal.

## 4. Estado del arte

Para documentar las bases teóricas y prácticas del trabajo, hemos hecho una revisión en artículos científicos, de los cuales de algunos retomamos sus arreglos experimentales, de otros su metodología de análisis y caracterización o simplemente el fundamento teórico.

La descarga eléctrica ha sido estudiada por más de 200 años. Sin embargo, mantiene un área de investigación activa en relación a la propagación de la descarga en distintos dieléctricos, con reconstrucciones tomográficas y con la formación de patrones en sistemas lejos de equilibrio.

Por mencionar algunas de las aplicaciones donde se ocupan descargas eléctricas, existen por ejemplo, en el limpiado de la combustión de gases, en purificadores de agua, en la prevención de descargas en la red eléctrica, en *switchs* semiconductores de potencia ultrarrápidos, en las lámparas de tubos neón, en las pantallas planas de computadora, en las televisiones de plasma y nuevos tipos de lasers pulsados.

Primeramente y sin restarles importancia, mostraremos dos artículos que, aunque tienen carácter de divulgación, amplían nuestros conocimientos respecto a la historia del estudio del fenómeno, las maneras de como ha sido estudiado y las áreas de aplicación.

[20] Galván nos proporciona un contexto histórico del estudio de las descargas, quien se ha interesado cuales fueron los primeros experimentos y la importancia del resultado de sus investigaciones, solo por mencionar algunos, el famoso experimento de Benjamín Franklin con el cometa donde demostró que los rayos estaban cargados eléctricamente hace 250 años, o cuando Oestered, tiempo después, descubrió la presencia de campos magnéticos alrededor de un conductor, viniendo después investigadores de la talla de Ampere, Faraday y Maxwell. El artículo además comenta alguna de las normas de protección contra corrientes eléctricas atmosféricas en fabricación de pararrayos en cuanto al material y la forma, con lo cual nos ayuda a la construcción de la justificación del proyecto de tesis, puesto que muestra uno de los campos en el que estudiar las descargas eléctricas es muy importante.

[19] Ebert nos brinda información respecto cuales son los campos en que se están aplicando los avances del estudio de descargas y la manera de caracterizarlos matemáticamente. Algunas de las formas de caracterizar a la descarga eléctrica ha sido por ecuaciones diferenciales parciales [1], por cálculos del campo eléctrico al avance de la propagación [2], por modelos estocásticos [3], por modelos de ramificación aleatoria [4] y por formación de patrones [5].

Con base a la problemática planteada de nuestro proyecto, hemos buscado referencias que nos apoyen con la metodología que seguiremos para la construcción del arreglo experimental, como también con el fundamento teórico de cuáles son los parámetros que usualmente se estudian de la descarga, por qué se estudian, y cuáles han sido otras maneras en las que se ha propuesto un modelo matemático de propagación.

[9] Sayito hace un estudio de una descarga en una geometría bastón-plano con un dieléctrico  $N_2/SF_6$  que es un aislante utilizado comúnmente en transformadores, hace un estudio de distancia, volumen, utilizando solo imágenes en 2D. Este artículo aporta a nuestra investigación su propuesta del arreglo experimental, puesto utiliza un generador de pulsos para la cámara (ccd), el flash y la descarga, además el experimento está construido dentro de un contenedor, para que éste pueda almacenar gas.

[10] Katsuki estudió canales ionizados paralelamente en geometría de electrodos alambre-plano, estudió las características eléctricas y su desarrollo temporal a lo largo del canal de ionizado. Gracias a que tiene una cámara de alta velocidad, estudió el comportamiento de la descarga respecto a la modificación de voltajes y polaridades.

La aportación de este artículo a nuestra investigación, al igual que el anterior, es la propuesta del modelo experimental, puesto que introduce el uso de un disparador de eventos (trigger), un detector de corriente de inicio de rayo para disparar la cámara fotográfica de alta velocidad, además de proveer las características mínimas que debe tener esta cámara.

[7] Watson es uno de los primeros en analizar imágenes de descargas eléctricas por medio del procesamiento de imágenes. Él utilizó un arreglo experimental en el cual la descarga eléctrica era provocada por impulso negativo o positivo en una geometría de electrodos baston-plano, y como dieléctrico aire. Con el procesamiento digital de imágenes desarrolló un algoritmo para estudiar la longitud y número de segmentos en la descarga, cuyas imágenes obtuvieron con una cámara de video y de ahí las llevaron al sistema de procesamiento de imágenes.

La contribución de este artículo a nuestra investigación es mostrar los pasos para obtener los parámetros de longitud y número de segmentos, que fueron la esqueletización de la imagen en 2D y el método de selección de un umbral en cambio de ángulo entre segmentos. Para nuestro caso si fuera de interés obtener estos parámetros para hacer el modelo matemático tenemos que expandir los métodos anteriores para utilizarlos en un análisis 3D.

[25] Watson tiempo después estudió la descarga eléctrica con geometría de electrodos punta-plano, y como dieléctrico utilizó aire caliente y frío. A la vez introdujo otro parámetro para estudiar, que es el número de divisiones de la descarga, hace una explicación detallada de por qué estudiar la descarga en aire caliente, y finalmente compara los parámetros obtenidos de la descarga en aire caliente contra los fríos, todos ellos se analizan en distancias de electrodos y voltajes distintos.

Cabe mencionar que la geometría punta-plano es más complicada de estudiar puesto que existe una mayor arborescencia, nuestro estudio trabajará con este tipo de geometrías.

[6] Batina estudió otra propiedad de las descargas eléctricas llamada “corona” que es característica de la descarga provocada en la geometría de electrodos punta-plano. A una configuración experimental típica la colocó dentro de un reactor cilíndrico Vessel llenado con aire ambiente. Ocupando una buena fuente de luz, una cámara ccd, empiezan a insertar humo dentro de la cámara Vessel y deja que el humo se estabilice, poco a poco aumenta el voltaje, comienza la descarga y observan el campo eléctrico alrededor ésta (gracias al humo) miden los tiempos, proponen un modelo matemático y lo lleva a simulación. El artículo, además de proporcionarnos una propiedad de la descarga (corona) de la cual también podríamos obtener su reconstrucción tomográfica, nos muestra la necesidad de caracterizar las descargas en un espacio más natural. Para poder obtener más información sobre ellos, en este artículo recurrieron al humo para poder tener mejor representación del campo eléctrico.

[12] Tardiveau estudió otra propiedad de la descarga eléctrica, se preguntó cuál es el efecto de un canal de ionizado (*streamer*) sobre otros *streamers* que se generan en la misma punta. Para provocar ese efecto modificaron la forma simple de aterrizar a tierra, colocando al electrodo plano siete aterrizajes distintos. Para estudiar el fenómeno ocupan una cámara normal y una cámara de alta velocidad.

La aportación de este artículo es el arreglo experimental de las cámaras fotográficas, la forma de disparar las cámaras no se había visto en ninguno de los artículos revisados. colocó en serie una descarga que no es la de estudio con el arreglo de la descarga que si se estudiará, así que cuando ocurra la primera descarga existe un detector que mande a disparar las cámaras; cuando se produzca la descarga que sí se va estudiar, se utilizan circuitos de retardo y triggers.

[27] Yañez estudió descargas eléctricas en una configuración punta-plano, con la que obtuvo parámetros de dimensión fractal para variaciones de distancia, voltaje, impulso y polaridad, todo en 2D con una cámara de video cuyas imágenes se procesan en la computadora. El hace una explicación detallada de aspectos sobre la implementación del arreglo eléctrico, por ejemplo: la fuente de alto voltaje, distancia entre electrodos, material de electrodos, la geometría de la punta del electrodo, el aterrizaje a tierra, tiempo de generación de la descarga.

Nosotros haremos el estudio de una descarga en la misma geometría de electrodos; la aportación de su tesis es introducirnos a la implementación del experimento y mostrarnos los detalles que hay que tomar en cuenta.

La tomografía axial computada (TAC) o también conocida como tomografía computada (TC), es un método imagenológico de diagnóstico médico, que permite observar el interior del cuerpo humano, a través de cortes milimétricos transversales al eje cefalo-caudal, mediante la utilización de los rayos X.

La imágenes obtenidas por un tomógrafo se presentan de una forma determinada al médico, éste, al visualizar el corte, lo piensa como si estuviera mirando al paciente desde los pies.

Los posibles usos de este método diagnostico son los siguientes: anormalidades del cerebro y médula espinal, tumores cerebrales y accidentes cerebro vasculares, sinusitis, aneurisma

de aorta, infecciones torácicas, enfermedades de órganos como el hígado, los riñones y los nódulos linfáticos del abdomen y muchos más.

Desde luego, el uso de las técnicas tomográficas no es propio de la medicina, de hecho Radon un matemático Austriaco probó que era posible reconstruir un objeto bidimensional o tridimensional, a partir de un conjunto de infinitas proyecciones en 1917. A continuación mostraremos artículos que son de nuestro interés, puesto que nos dan las bases para hacer la reconstrucción tomográfica y cómo se hace la reconstrucción de superficie para que se pueda ver en pantalla.

[21] Fausto muestra un algoritmo que dado un conjunto de puntos que representan un objeto tridimensional, hace la reconstrucción de la superficie del objeto por medio de mallas triangulares que son formadas por pivotar una esfera. Él también nos habla del desempeño del algoritmo contra otros propuestos, resulta que el algoritmo es más eficiente y conceptualmente sencillo de entender, pero el algoritmo puede llegar a tener problemas en concavidades. Su artículo nos sirve para nuestro proyecto en ampliar nuestro conocimiento en el área de algoritmos existentes para la reconstrucción de una superficie 3D.

[22] Delingette desarrolla otro algoritmo para hacer reconstrucciones de superficie automáticas, basándose en la teoría de modelos deformables, específicamente en uno que el había desarrollado con anterioridad denominado *mallas simplex*, donde a manera contraria de las triangulaciones, su algoritmo está basado en la posición relativa de un vértice con respecto a sus vecinos en términos de un ángulo simple y parámetros métricos. Las mallas simplex son el dual topológico de las triangulaciones y tienen la ventaja de que permiten deformaciones "suaves", de manera simple y eficiente. Este algoritmo permite el manejo de superficies sin ninguna restricción en su forma o topología.

Estas son las características que hacen interesante al método para su aplicación a este proyecto, puesto que el fenómeno que se reconstruirá (el arco eléctrico) es un plasma, en donde no se puede pronosticar las características de su forma.

[23] Wolfgang explica que para hacer una reconstrucción 3D existen arreglos experimentales que utilizan dos o más cámaras usando distribuciones equidistantes (es el caso de nuestro arreglo), existen problemas a los que conlleva usar ese tipo de arreglo en objetos de forma arbitraria. Él propone tener puntos de visión del objeto en distintas distancias y diferentes grados, con ello no tener esos errores.

Propone un algoritmo que permite evitar pérdidas haciendo uso de una mesa giratoria y con ello obtener varios puntos de visión.

Este artículo, nos ayuda a tener claro cuales son los errores clásicos al hacer una reconstrucción, y nos explica como es que se resuelven estos problemas habitualmente.

[24] Shahrokni nos muestra un algoritmo de esqueletización o adelgazamiento, una tarea que se utiliza comúnmente en el área de procesamiento de imágenes por ejemplo compresión, cuantificación, generación de caminos, navegación de objetos, generación de

animación. De un esqueleto se desearía obtener las siguientes características: centro con respecto a los límites del objeto, preservar la estructura del objeto original, conservar conectividad, capacidad de reconstruir el objeto. El artículo nos muestra un algoritmo eficiente de esqueletización en 3D utilizando una técnica de división en *clusters*. Un algoritmo similar nos interesa implementar puesto que en los requerimientos de nuestro proyecto buscamos hacer un análisis del canal de la descarga y con el esqueleto podemos obtener el centro de manera local y con ello obtener el radio del canal.

Una parte importante de nuestro proyecto es hacer un análisis de las propiedades fractales de la descarga eléctrica, esto no es algo nuevo, desde 1984 se empieza a estudiar la naturaleza fractal de la descarga, pero siempre esos estudios se hacen en base a una imagen en 2D o en 3D haciendo uso de simulaciones, nuestro proyecto hace el estudio fractal en 3D en base a una reconstrucción tomográfica, por lo que los artículos siguientes nos servirán de base teórica.

[26] Niemeyer es el primero que habla de la dimensión fractal de la descarga eléctrica. En su trabajo calcula la dimensión fractal usando el número de brincos a una distancia  $r$  del centro, propone un modelo estocástico para simular la descarga eléctrica, y propone una fórmula de expansión de la descarga con base al campo eléctrico local.

El artículo nos aporta otra manera de calcular la dimensión fractal y justifica el por qué hacer un estudio fractal de una descarga eléctrica.

[13] Ioana estudia cómo varía la dimensión fractal en 2D en una geometría rectangular-plano y circular-plano. También hace la simulación de la propagación de una descarga en 3D, para simular parte de un modelo matemático conocido, y con la imagen de la simulación obtienen la dimensión fractal.

La contribución de su artículo es tener un antecedente del comportamiento de la dimensión fractal, según la variación de parámetros que modifican el fenómeno. Además nos muestra antecedentes de que se ha intentado obtener la dimensión fractal en 3D aunque no sea por un medio experimental.

[8] Ehara obtiene la dimensión fractal de una descarga provocada en una geometría punta-plano y, usando como dieléctrico el polymethylmethacrylate, propone un método experimental parecido al de Watson [7], y ocupa el método de *box-counting* para obtener la dimensión fractal. Lo interesante es que la descarga la generan con corriente alterna (AC) en 20 fases distintas y muestran que las dimensiones fractales pueden variar dependiendo de la fase. Incluso pueden llegar a ser muy diferentes estando en la misma polaridad de la fase.

El artículo nos proporciona una metodología para obtener las imágenes, incluyendo el tipo de filtro para ocupar en la cámara ccd, y proporciona algunas interpretaciones de la dimensión fractal.

[4] Reginald obtuvo la dimensión fractal de manera teórica, para las descargas de tipo filamento que son las usadas en las lámparas neón. Para desarrollarla unió la teoría de procesos de ramificación aleatoria con la teoría de dimensión fractal.

La aportación de su artículo es explicar en que obteniendo esta dimensión se pueden entender mejor el proceso de descarga, la ionización primaria y la ionización secundaria.

[11] Petit expone otra propiedad de las descargas eléctricas; estudia la descarga en AC en sus dos fases principales, positiva y negativa, con una barrera dieléctrica en una geometría punta-plano. Hace el experimento con una cámara ultrarrápida, aísla imágenes para las fases positiva y negativa y muestra que las imágenes que se pueden percibir en AC es la composición de las que obtuvieron de manera aislada.

La aportación del artículo es mostrar otro de los comportamientos de las descargas eléctricas que son de interés en la geometría de electrodos a utilizar en la tesis.

Por nuestra parte, la propuesta de tesis viene a continuar con un proyecto que surgió de la necesidad de mostrar un modelo 3D del canal de la descarga sin que fuera éste producto de una simulación, sino un modelo de una descarga real. El proyecto fue llevado a cabo pero quedó alrededor de 6 años stand by, pero no por esto significa que el proyecto haya perdido importancia, sino que las técnicas de reconstrucción son una herramienta que casi no se ha explotado en la investigación eléctrica. En todo ese tiempo, en la literatura de este tema no se ha vuelto a reportar un estudio de descargas usando técnicas tomográficas, sin embargo, otros investigadores mostraron interés en caracterizar descargas desde modelos 3D, ahora el proyecto lo hemos retomado dándole un brío nuevo, siempre intentando buscar cosas nuevas para aportar a la ciencia; por ello decidimos obtener varios parámetros que son de interés en el estudio de las descargas como algunos de los vistos en la revisión, pero ahora obteniéndolos de sus respectivas reconstrucciones.

El trabajo al que nos referimos es el de Rangel [17], a lo largo de este trabajo haremos referencia constantemente a él, puesto que retomamos varias de las técnicas utilizadas para hacer la reconstrucción y otras de ellas las optimizaremos. No usamos de manera íntegra muchas de las técnicas de procesamiento de imágenes que en su trabajo propone, puesto que el arreglo eléctrico con el que trabajó tuvo una geometría de electrodos diferente y en consecuencia la manera de tratar las imágenes es distinta.

## 5. Fundamentos teóricos

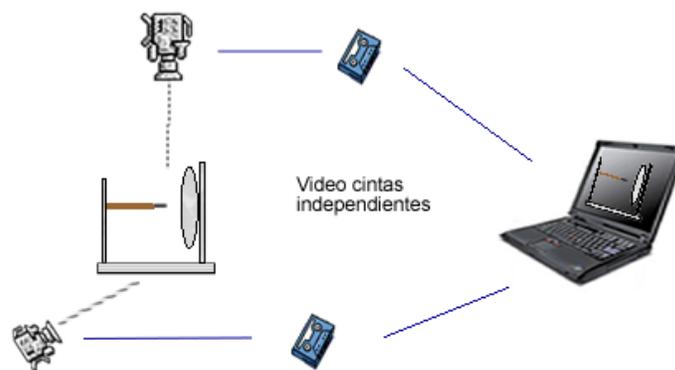
Hemos mostrado el flujo de las tareas a realizar para poder reconstruir, analizar y modelar las descargas eléctricas. Para realizar la reconstrucción 3D, se requiere de un procesamiento previo de las imágenes capturadas. Este procesamiento tiene como objetivo el eliminar de las imágenes toda información que no pertenezca al objeto que se quiere reconstruir.

Sin embargo, antes de poder hablar acerca de los métodos para el procesamiento de las imágenes, vamos a ver un poco sobre la adquisición de las mismas. Posteriormente daremos algunos fundamentos del malleo aplicado a la reconstrucción y la optimización del mismo.

Finalmente pasaremos a introducir las bases estadísticas y fractales que nos ayudarán a caracterizar y modelar la descarga.

### 5.1 Adquisición de imágenes

Existen varias maneras de hacer la adquisición de imágenes, un espejo y una cámara conectada directamente a la PC, o con dos cámaras conectadas directamente a la PC, videocintas independientes y una tarjeta de adquisición de video, como ya ha sido reportado en [17], el montaje que causa menor conflicto es el que almacena de manera independiente los videos y se implementa un sistema de sincronización, con él, se puede realizar la edición de los videos y extraer las imágenes deseadas. Todo ello con el fin de evitar pérdida de información durante la captura de los mismos (ver figura 5.1).



**Figura 5.1** Esquema de captura independiente con dos videocámaras.

## 5.2 Sincronización de imágenes

Al conocer la estrategia de adquisición de imágenes nos debemos preguntar: ¿Cómo sabemos que la descarga que estoy viendo en un video es la misma que la del otro video? Y peor aún ¿cómo sé que es el mismo instante? Intuitivamente pensaríamos en implementar un disparador de eventos el cual mandara una señal para lanzar la descarga, al analizar los videos con la pura presencia del fenómeno ya tendríamos sincronizadas nuestras imágenes. El detalle está en que la fuente de alto voltaje con la que contamos para este experimento no tiene la capacidad de ser disparada de esta forma, se trabaja de manera manual, uno va incrementando el voltaje hasta llegar al punto de ruptura. Por lo tanto, hay que cambiar un poco ese primer intento intuitivo de sincronizar haciendo uso de otros dispositivos, pero se entrará más a fondo en ello en el capítulo de implementación.

## 5.3 Procesamiento digital de imágenes

Una vez que tenemos a nuestras imágenes de la descarga se deben implementar los algoritmos necesarios para poder separar de la imagen de trabajo, la zona donde se presenta el fenómeno y así tener la información necesaria y suficiente para poder llevar a cabo la reconstrucción tomográfica. La implementación del procesamiento de imágenes se divide en cuatro etapas: pre-procesamiento, segmentación, realce, y reconstrucción tomográfica.

### 5.3.1 Pre-procesamiento o acondicionado de la imagen

Muchas veces, durante el proceso de adquisición, las imágenes resultantes vienen acompañadas de algún tipo de ruido que pudiera ocasionar que el desempeño del sistema se viera afectado. El ruido puede provenir de fuentes tan diversas como:

- a) La óptica y electrónica asociadas al sistema de adquisición
- b) Las condiciones de iluminación
- c) Las sombras creadas entre objetos
- d) Las condiciones atmosféricas

Se vuelve necesario procesar la imagen proveniente del módulo de adquisición, tratando de reducir en lo posible la influencia del ruido utilizando técnicas de filtrado.

El objetivo de dichas técnicas consiste en reducir o eliminar, en el mejor de los casos, el ruido presente en una imagen. Debido a que el proceso de modelado del ruido es muy complicado, en el mejor de los casos lo que se logra es una reducción del ruido presente en la señal.

El filtrado de una imagen se puede llevar a cabo tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio espacial. En el primer caso, se calcula la transformada de Fourier de la imagen que será filtrada. El resultado es enseguida multiplicado (en el dominio de la

frecuencia) por una función de transferencia de filtrado adecuada. Finalmente, al producto obtenido le es calculada la transformada inversa de Fourier para obtener la imagen mejorada deseada.

En el segundo caso, se trabaja en el mismo dominio de los píxeles al cambiar el valor de un píxel tomando en cuenta el valor de dicho píxel y el de algunos de sus vecinos.

Los filtros lineales se basan en conceptos que afirman que la función de transferencia y el impulso o función de distribución puntual de un sistema lineal son transformadas de Fourier inversas una de otra. Los filtros denominados de *paso bajo* atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier a la vez que dejan inalteradas las bajas frecuencias (es decir, el filtro “deja pasar” las frecuencias bajas). Las componentes de alta frecuencia caracterizan los bordes y los restantes detalles muy marcados de la imagen, y por ello el efecto de introducir un filtrado de paso bajo es el de hacer mas borrosa la imagen. De forma similar, los filtros de *paso alto* atenúan o eliminan las componentes de baja frecuencia. Como estas componentes son responsables de las características lentamente variables de la imagen, como el contraste global y la intensidad media, el resultado neto de un filtrado de paso alto es la reducción de estas características y, en correspondencia, una aparente agudización de los bordes y de los restantes detalles finos. Un tercer tipo de filtrado, denominado *filtrado de paso banda*, elimina regiones elegidas de frecuencias intermedias. Estos filtros se emplean para la restauración de imágenes y son de escaso interés para la mejora de imágenes.

Para mayor información y fundamentos teóricos consulte Sossa[28].

### 5.3.2 Modelos de color

El propósito de un modelo de color es facilitar la especificación de colores de manera estándar. La mayoría de los modelos de color utilizados actualmente están orientados, bien hacia el hardware (monitores de color, impresoras), o bien hacia aplicaciones donde el objetivo es una manipulación del color (por ejemplo la creación de gráficos de color para animación).

Los modelos orientados al hardware son el modelo RGB (monitores, cámaras de color), el modelo CMY (impresoras de color), y el modelo YIQ (transmisión de señal de TV). Para este último modelo, la  $Y$  se corresponde con la iluminación, mientras que  $I$  y  $Q$  son dos componentes cromáticos llamados en fase y en cuadratura, respectivamente.

Entre los modelos utilizados frecuentemente para la manipulación de imágenes en color están el modelo HSI (tono, saturación e intensidad) y el HSV (tono, saturación y valor). Existen en la literatura revisada tablas de equivalencia, así como fórmulas que permiten el paso de unos modelos a otros.

### 5.3.3 Conversión a grises

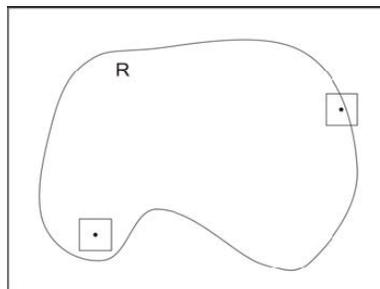
El modelo de color que vamos a utilizar es el RGB, por lo que en nuestras herramientas disponibles debemos contar con la manera de convertir a grises. Como sabemos, la imagen se descompone en tres matrices, cada una de ellas contiene, respectivamente los valores de las componentes en rojo  $R$ , verde  $G$  y azul  $B$  de cada punto de la imagen original.

$$Y = 0.3R + 0.59G + 0.11B$$

Siendo  $Y$  la matriz que contiene la imagen en tonos de gris  $p \in [0 \dots 255], \forall p \in Y$

### 5.3.4 Operaciones morfológicas sobre imágenes

La morfología matemática es una rama del tratamiento digital no lineal de imágenes que se concentra básicamente en la estructura de las imágenes. Su base matemática viene de la teoría de operaciones entre conjuntos, desarrolla por Minkowski.



**Figura 5.2** Un elemento estructural encajando en una posición y no encajando en otra.

La idea básica de la morfología matemática consiste en probar una imagen por medio de un probador llamado *elemento estructurante* y así cualificar la manera en que este elemento encaja o no en dicha imagen. En la figura 5.2 se observa una imagen y un elemento estructurante cuadrado (el probador). El elemento estructurante es posicionado en lugares diferentes, en este caso dos y encaja una posición, en la otra no. Al marcar las posiciones en las cuales el elemento estructurante encaja en la imagen (objeto) uno es capaz de derivar información relacionada con la estructura relativa a la imagen y al objeto. Esta información depende tanto del tamaño del elemento estructurante como de su forma.

Todos los métodos morfológicos dependen del concepto de encajar el elemento estructurante. Existen dos operaciones de base, la erosión y la dilatación. A partir de éstas se derivan las demás operaciones.

## Definiciones básicas de operaciones de conjuntos

**Definición 5.1.** Sea  $A$  un conjunto en  $Z^2$  con componente  $a = (a_1, a_2)$  la traslación de  $A$  por  $x = (x_1, x_2) \in Z^2$  denotada como  $(A)_x$  se define como:

$$(A)_x = \{c | c = a + x, \forall a \in A\}$$

**Definición 5.2.** Sea  $B$  un conjunto en  $Z^2$  con componente  $b = (b_1, b_2)$ , la reflexión de  $B$  denotada  $\hat{B}$  se define como:

$$\hat{B} = \{b | b = -x, \forall b \in B\}$$

**Definición 5.3** El complemento de  $A$ , denotado como  $A^c$  se define como:

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

**Definición 5.4** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $Z^2$ , la diferencia entre  $A$  y  $B$  denotada como  $A - B$ , se define como:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

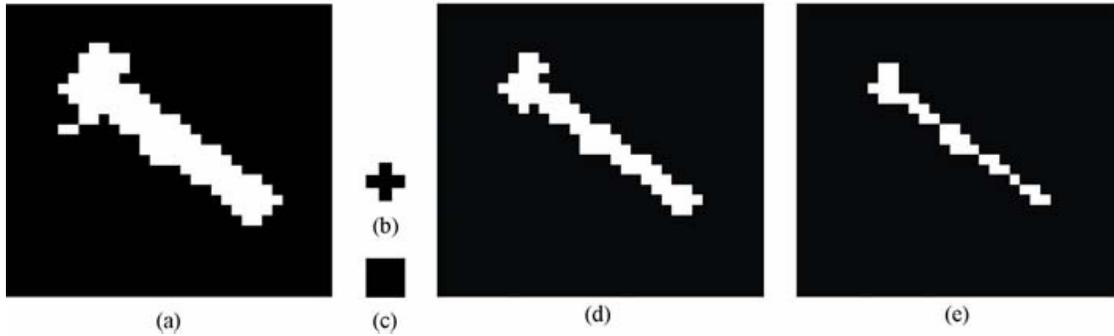
## Definiciones básicas de morfología matemática

**Definición 5.5** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $Z^2$ , la erosión de  $A$  por  $B$  denotada como  $A \ominus B$ , se define como:

$$A \ominus B = \{x | (B)_x \subseteq A\}$$

En otras palabras, la erosión de  $A$  por  $B$  es el conjunto de todos los puntos  $x$  tal que  $B$  trasladada por  $x$  está contenida en  $A$ .

En la figura 5.3(a) se muestra una imagen binaria, en la figura 5.3 (b) y (c) dos elementos estructurales diferentes. En 5.3 (d) y (e) las erosiones respectivas de (a).



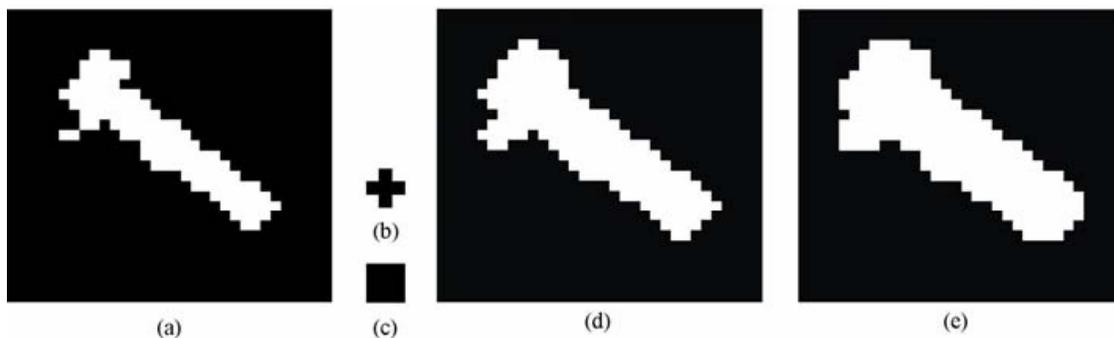
**Figura 5.3** (a) Una imagen sencilla. (b) y (c) Dos elementos estructurales diferentes. (d) y (e) Erosiones respectivas de (a).

**Definición 5.6** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $Z^2$ , la dilatación de  $A$  por  $B$ , denotada como  $A \oplus B$  se define como:

$$A \oplus B = \{x | \hat{B}_x \cap A \neq \emptyset\}$$

En otras palabras, el proceso de dilatación consiste en obtener la reflexión del elemento estructurante  $B$  alrededor de su origen y después pasar esta reflexión por  $x$ .  $A \oplus B$  es entonces el conjunto de todos los desplazamientos en  $x$  tales que  $\hat{B}$  y  $A$  compartan al menos un elemento no igual a cero.

En la figura 5.4 (a) se muestra un conjunto simple, en las figuras 5.4 (b)-(c) dos elementos estructurales diferentes. En las figuras 5.4 (d)-(e) las dilataciones correspondientes.



**Figura 5.4** (a) Una imagen sencilla. (b) y (c) dos elementos estructurales diferentes. (d) y (e) Dilataciones respectivas de (a).

## Operaciones combinadas: apertura y cerradura

Como ya se dijo anteriormente, una dilatación expande una imagen u objeto y una erosión la reduce. En esta sección se discuten dos operaciones derivadas de la dilatación y la erosión: la apertura y la cerradura.

### Apertura

Una apertura morfológica, en general, alisa (suaviza) el contorno de un objeto, rompe uniones pequeñas entre objetos, eliminando, a la vez, pequeñas protuberancias y pequeñas componentes ruidosas. En la figura 5.5 (a)-(d) se muestran ejemplos de cada una de estas tres situaciones.

**Definición 5.7** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $Z^2$ , la apertura de  $A$  por  $B$ , denotada como  $A \circ B$  se define como:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

En otras palabras, la apertura de  $A$  por  $B$  es simple y sencillamente la erosión de  $A$  por  $B$  seguida de la dilatación del resultado.

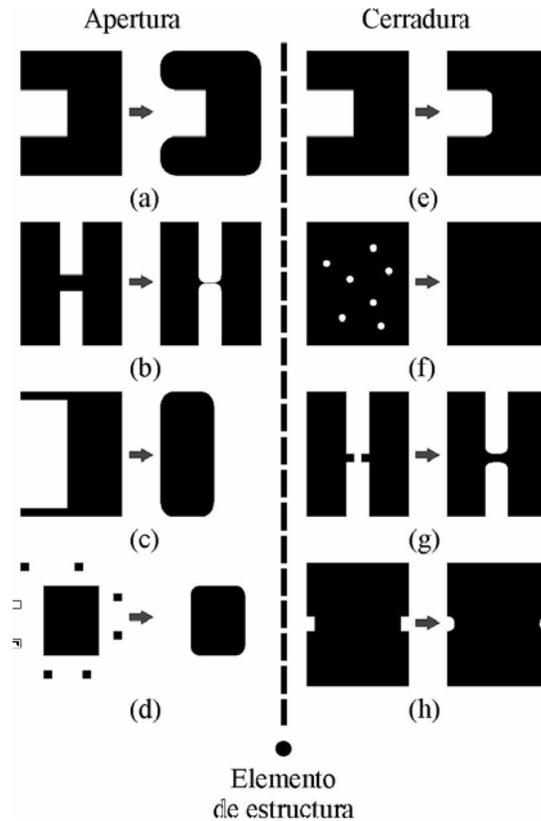
### Cerradura

La cerradura también tiende a suavizar porciones del contorno pero a diferencia de la apertura, la cerradura tiende a eliminar pequeños agujeros en el objeto, fusionar pequeños rompimientos y a rellenar pequeñas entradas al objeto. En las figura 5.5 (e)-(h) se muestra ejemplos de estas situaciones.

**Definición 4.8.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en  $Z^2$ , la cerradura de  $A$  por  $B$ , denotada como  $A \bullet B$  se define como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

En otras palabras, la cerradura de  $A$  por  $B$  es simple y sencillamente la dilatación de  $A$  por  $B$  seguida de la erosión del resultado.



**Figura 5.5** (a-d) Efectos de la aplicación de una apertura sobre una imagen.  
 (e-h). Efectos de la aplicación de una cerradura sobre una imagen.

### 5.3.5 Segmentación

La segmentación de imágenes puede ser definida como el proceso de subdividir o particionar una imagen en sus regiones, componentes, partes u objetos. La segmentación puede también ser definida como el encontrar, por medio de un algoritmo numérico sus regiones homogéneas y sus bordes.

Cualquiera que sea la definición que sobre segmentación se adopte, la idea básica consiste en aislar en la imagen los diferentes objetos que se reconocerán, en nuestro caso aislar la descarga eléctrica.

Una manera formal de definir el proceso de segmentación es la siguiente: la segmentación es el proceso de particionar una imagen  $f(x,y)$  en regiones de píxeles,  $R_1, R_2, \dots, R_n$  tal que cada una de estas sub-imágenes represente un objeto o una parte del mismo. La segmentación es, pues, el proceso que consiste en agrupar píxeles en regiones, tales que:

$$\bigcup_{i=1}^n R_i \subseteq f(x,y) \quad R_i, i = 1, 2, \dots, n \text{ es conectada}$$

$$R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i, j \mid i \neq j$$

$$P(R_i) = \text{verdadero}, i = 1, 2, \dots, n$$

*Cada  $R_i$  satisface un predicado o conjunto propiedades. Todos los elementos de cada  $R_i$*

$$P(R_i \cup R_j) = \text{Falso para } i \neq j.$$

*Esto significa que píxeles que pertenecen a regiones adyacentes al ser tomadas como una sola no satisfacen el predicado. Si no es el caso, entonces, deberán ser consideradas como una sola región.*

La segmentación automática de imágenes es, en general, una de las tareas más difíciles de realizar en análisis de imágenes, sobre todo en entornos abiertos, en nuestro caso el espacio donde ocurre la descarga esta bajo condiciones controladas; es decir, podemos controlar la iluminación, el fondo y la posición de las cámaras.

### 5.3.6 Técnicas basadas en umbralado

Históricamente estas técnicas fueron las primeras usadas en análisis de imágenes para segmentar una imagen. La idea básica consiste en convertir una imagen en niveles de gris  $f(x,y)$  en una imagen binaria  $b(x,y)$  buscando que los objetos de interés de la imagen queden separados del fondo.

Para que estos métodos sean efectivos se requiere que los objetos de interés presenten suficiente contraste con respecto al fondo y que se conozca el rango de intensidad ya sea de los objetos o el fondo. Si se supone que el objeto que se segmentará es más claro que el fondo, entonces:

$$b(x,y) = \begin{cases} L - 1 & \text{si } f(x,y) \geq u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### 5.3.7 Filtro para imágenes en color

Los filtros de umbralado pueden ser usados también en imágenes en color persiguiendo la misma finalidad de aislar la región de interés en base a tonalidades de color. Específicamente para el sistema RGB el filtro  $fc(I)$  se define como:

$$f_c(I) = \{p \in I \text{ SI } \partial_{R-} \leq R(p) \leq \partial_{R+} \text{ y} \\ \partial_{G-} \leq G(p) \leq \partial_{G+} \text{ y} \\ \partial_{B-} \leq B(p) \leq \partial_{B+} \}$$

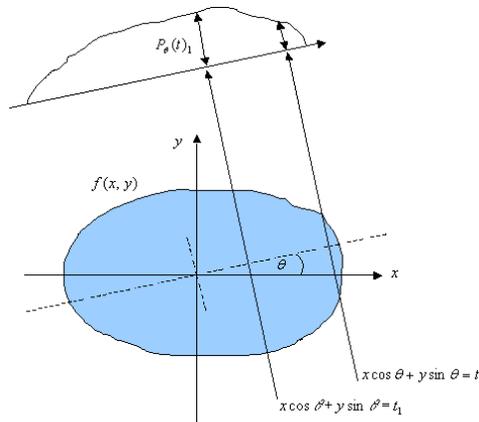
donde  $R(p), G(p), B(p)$  son los valores de las componentes de color rojo, verde y azul, respectivamente, del píxel  $p$ .  $R(p), G(p), B(p) \in [0, 255]$   $p$  cualquier píxel de la imagen y  $\partial_{R-}, \partial_{R+}, \partial_{G-}, \partial_{G+}, \partial_{B-}, \partial_{B+}$  umbrales mínimos y máximos para cada banda de color, los cuales permitirían delimitar específicamente la descarga eléctrica, se cumple que  $\partial_{R-} \leq \partial_{R+}, \partial_{G-} \leq \partial_{G+}, \partial_{B-} \leq \partial_{B+}$ .

## 5.4 Reconstrucción tomográfica

Para explicar este principio, tenemos que un cuerpo convexo  $k$ , que tiene una masa de densidad variable, dada por una función  $f(x, y, z)$ . Pensemos ahora, que  $k$  es atravesado por una radiación cualquiera (rayos X, láser, luz), cuya trayectoria sea una recta  $S$ , y de la cual se pueda medir su intensidad de entrada y de salida. La diferencia entre estas intensidades será la absorción del rayo por la materia en el interior de  $k$  y dependerá de la recta  $S$  por donde el rayo transita. Es posible medir experimentalmente esta función de  $S$  que llamaremos  $F(S)$ . El matemático alemán J. Radon encontró una manera de calcular  $f(x, y, z)$  a partir de  $F(S)$ , conocida como la "transformada de Radon".

Cormack y Hounsfield (1972) tuvieron que resolver algunos problemas a partir de los resultados teóricos de Radon. Por ejemplo: Radon afirma que se puede conocer  $f(x, y, z)$  si se conoce  $F(S)$  para "todas" las rectas  $S$ . En la práctica solamente podemos tener en cuenta un número finito de rectas (que puede ser grande). Esto lleva a analizar lo que ocurre cuando solamente se conoce  $F(S)$  para ese número finito de rectas y la mejor manera de escoger las mismas. Teóricamente se demuestra que con un número finito de rectas nunca se podrá reconstruir "exactamente" el interior del cuerpo, pero tomando un conjunto adecuado y suficiente de rectas se logra reconstruir una aproximación de la imagen que es bastante confiable.

El procedimiento práctico consiste en dividir  $k$  en secciones planas y resolver el problema sección por sección, para después integrarlas a todo el cuerpo  $k$  (vease figura 5.6).



**Figura 5.6** Proyección  $P_\theta$  de un objeto

La proyección está relacionada con la distribución local de la atenuación  $f(x,y)$  de acuerdo con la siguiente ecuación

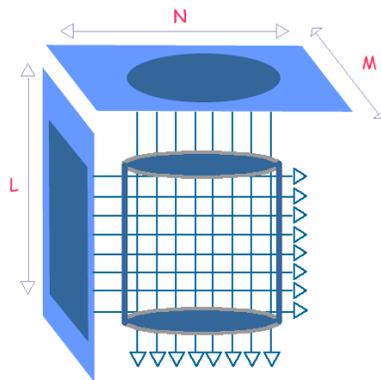
$$g(s,\theta) = R(f(x,y))$$

Donde  $R$  se denomina la transformada de Radon y representa la integral de  $f(x,y)$ , a lo largo de un rayo  $S$  que atraviesa al objeto en la dirección  $\theta$ .

Para resolver el problema de hallar  $f(x,y)$  a partir de  $g(s,\theta)$  existen diferentes métodos que permiten encontrar la imagen original para resolver la ecuación, estos se pueden clasificar en:

- Métodos iterativos, en los que se estima un valor y por iteraciones sucesivas se va aproximando al objeto a reconstruir.
- Métodos analíticos, por ejemplo el *backprojection*, en este caso la imagen se obtiene como la suma de todas las contribuciones para cada ángulo de corte. Para eliminar los ruidos introducidos por el aparato, se filtra la imagen en forma digital.

De una manera más práctica veamos cómo se reconstruye un cilindro a partir de dos de sus proyecciones, esas proyecciones corresponden a las vistas lateral y superior de un cilindro; como podemos observar en la figura 5.7, la proyección superior corresponde a un círculo y la proyección lateral a un rectángulo.

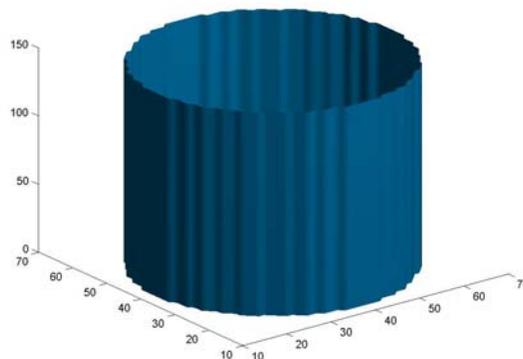


**Figura 5.7** Reconstrucción tomográfica de un objeto a partir de sus proyecciones lateral y superior

Después de aplicar el algoritmo de reconstrucción tomográfica, tenemos una reconstrucción  $R$  que está en  $\mathcal{R}^3$  dada por una matriz de  $M \times N \times L$ , también la podemos llamar imagen volumétrica.

Como los datos que describen nuestro objeto en  $\mathcal{R}^3$  los tenemos en forma de matriz, debemos modificarlos para poderlos visualizar en pantalla. Generalmente se trabaja con listas de vértices que componen al objeto, aún así la cantidad de información que tendríamos sería excesiva, puesto que tenemos vértices que nos dan la información de coordenadas que están dentro del objeto y que mostrarlas en pantalla sería totalmente innecesario, por lo que tenemos que implementar un algoritmo que nos ayude a ver solo la superficie, y así minimizar la cantidad de información que tiene que ser mantenida en memoria, así también, los cálculos para el renderizado.

Ya hemos mencionado algunos de los métodos existentes para la reconstrucción de superficies dentro de nuestro estado del arte y mencionaremos un poco más sobre ellos en el siguiente tema. El método utilizado para la reconstrucción de la superficie de nuestro ejemplo se llama isosuperficies, en la figura 5.8 apreciamos la reconstrucción.



**Figura 5.8** Reconstrucción de un cilindro real por isosuperficies.

## 5.5 Reconstrucción de superficie por mallas

Como planteamos anteriormente, después de hacer la reconstrucción tomográfica necesariamente requerimos hacer una reconstrucción de la superficie del objeto, entre los métodos más utilizados para hacer la reconstrucción de imágenes volumétricas está el uso de mallas, existen otros sistemas de reconstrucción de superficie basados en representaciones paramétricas, un poco más adelante plantearemos los problemas a los que conlleva intentar reconstruir con ellos una superficie real.

Por el momento entraremos en más detalle con los sistemas basados en mallas, porque nuestro proyecto trabaja con ellas. En general, de un sistema de reconstrucción basado en mallas se requieren los siguientes puntos:

1) Segmentación: la escena descrita en el conjunto tridimensional es usualmente constituida por varios objetos cercanos entre sí, espacialmente. La tarea de segmentación consiste en aislar los puntos de los objetos a partir de puntos de datos correspondientes a objetos vecinos o colindantes.

2) Filtrado: Conjuntos reales de información tridimensional (conjuntos 3D), siempre incluyen alguna cantidad de ruido. Por lo tanto, normalmente se requiere el suavizar el modelo reconstruido para reducir el efecto del ruido, sin remover características salientes, tales como bordes afilados.

3) Extrapolación de datos perdidos: En muchos casos, los conjuntos 3D no describen en su totalidad un objeto dado. Por lo tanto, es necesario el manejar esos datos de puntos perdidos, extrapolando la superficie.

4) Control de densidad de mallas: Cuando un conjunto de datos densos son provistos, normalmente se requiere, en especial para propósitos de visualización, reducir enormemente la cantidad de información almacenada en el modelo geométrico. Por el contrario, cuando se provee información muy dispersa, es necesario incrementar la densidad de la malla, refinando el modelo geométrico. Recordemos que aquí se está hablando de los aspectos de visualización de las mallas en general, y no de optimizar la cantidad de información con que se describe un modelo, y que es precisamente uno de los objetivos de las mallas simplex.

5) Control de calidad de mallas: Muchos algoritmos de computación científica (mecánicas, análisis de flujo) requieren de la definición de elementos de alta calidad geométrica definidos en las mallas. La calidad de la malla puede ser definida de varias formas. Por ejemplo, en modelos triangulados, la calidad geométrica puede ser medida usando el mínimo, la mediana y el promedio de los ángulos de los triángulos.

Son pocos los algoritmos existentes que buscan resolver el problema de "reconstrucción general" [22]. Por ejemplo, las isosuperficies son técnicas usada comúnmente para reconstruir superficies, a partir de imágenes volumétricas [13]. Como sea, al no manejar datos perdidos o con ruido, no puede ser considerado como una técnica de reconstrucción

general. Similarmente, la triangulación DeLaunay es usada ampliamente para la reconstrucción serial, o reconstrucción a partir de puntos desorganizados, pero no puede extrapolar puntos perdidos [13], [14].

El modelado deformable se ajusta bien para la reconstrucción de objetos en general ya que poco asume acerca de la silueta a recuperar y puede trabajar con datos perdidos o ruidosos [15]. Existen varios marcos para modelos deformables, pero un acercamiento común consiste en la formalización de la deformación como un problema variacional que involucra una energía interna asegurando la continuidad geométrica del modelo y una energía externa que controla la precisión del acople. Muchos investigadores han propuesto sistemas de reconstrucción basados en modelos deformables. Como sea, son pocos los sistemas que enfocan el problema de reconstrucción general, incluyendo las cinco tareas antes mencionadas.

Un tópico clave para un sistema de reconstrucción en general es la selección de una representación "buena" de superficies. Más precisamente, tales representaciones deben de ajustarse de manera adecuada para todas las superficies, independientemente de su geometría y topología.

### **El problema de parametrización**

La mayoría de los sistemas de reconstrucción se basan en representaciones paramétricas, tales como splines o elementos finitos. Una representación paramétrica provee una transformación continua entre un espacio de parámetros  $\Omega$  incrustado en el plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  y una superficie tridimensional. La existencia de una representación continua habilita la definición de cantidades geométricas, tales como un vector normal ó información de curvatura, en cualquier lado de la superficie del modelo. Esto normalmente es requerido para tareas de alto nivel tales como el diseño CAD (Diseño Asistido por Computadora).

Como sea, las representaciones paramétricas sufren de dos problemas. El primer problema está relacionado con la representación de figuras complejas. Puesto que el parametrizar una figura es equivalente a mapear a un subconjunto del plano Euclidiano hacia la figura, puede ocurrir un problema cuando el objeto no es plano, cilíndrico, o de topología toroidal. Para figuras esféricas por ejemplo, al menos un polo o punto degenerativo es creado al mapear un plano en una esfera. Este punto lleva a muchos problemas en la deformación de la superficie ya que el vector normal y de curvatura no pueden ser calculados de manera estable en el vértice. Se ha hecho mucho trabajo en el campo de diseño geométrico asistido por computadora para sobrepasar estos problemas topológicos [16], [17]. Un acercamiento común consiste en "zurcir" varios parches paramétricos y asegurar así la adecuada continuidad geométrica.

El segundo problema recae en la naturaleza de la parametrización que influye grandemente al esquema de deformación. Dicha influencia de la parametrización se origina a partir de la naturaleza de transparencia de los funcionales que son usualmente definidos en términos de cantidades paramétrico-dependientes, tales como las derivadas parciales. Este es el caso,

por ejemplo, del funcional ampliamente usado: "plato delgado", que se basa en derivadas de primer orden. Cuando la deformación es encajonada por funcionales paramétrico-dependientes, el modelo geométrico reconstruido es dependiente de la naturaleza de la parametrización inicial.

En la mayoría de los artículos de investigación [3], [4], [5], [9], [11], [16], se pone poca atención a los errores introducidos por distorsiones métricas entre el espacio de parámetros y la superficie. Esto se debe principalmente a que se limitan a objetos con topologías simples, como las topologías planares o cilíndricas.

Como una conclusión inicial, el construir modelos deformables paramétricos de topología arbitraria es un problema difícil puesto que encajona el problema de tener discontinuidades por los parches así como por mantener la parametrización con poca distorsión. No es muy factible para ser usado como un método general de reconstrucción debido a su costo computacional al realizar cambios topológicos tales como crear hoyos ó refinamientos locales.

Las mallas simplex se proponen como una representación de superficies usadas en un sistema de reconstrucción [2]. Las mallas simplex pueden representar superficies de todas las topologías, al igual que las mallas de triangulación. Aun más, la geometría de mallas simplex permite definir en cada vértice, cantidades geométricas discretas tales como el promedio de curvatura o vectores normales. Se han definido fuerzas de regularización en las mallas simplex permitiendo una continuidad geométrica de alto orden, de manera simple y eficiente. Además, operadores de topologías locales y globales se definen para refinar una malla simplex o cambiar su orden, de manera sencilla. Ya que las mallas simplex no son modelos paramétricos, no es necesario actualizar una matriz de rigidez o el mapeo de parametrización cuando se realizan transformaciones de topología.

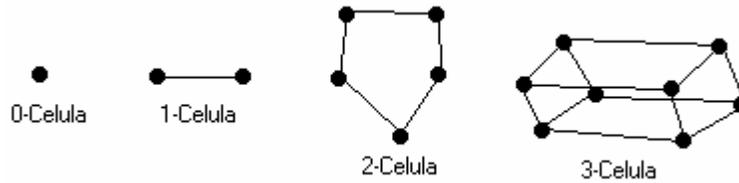
Más información y fundamento teórico sobre la reconstrucción tomográfica, lo encontramos en [24].

## 5.6 Método de las mallas simplex

A continuación se revisan las definiciones y propiedades de las mallas simplex. En caso de requerirse información más profunda de este tema, se invita que el lector revise la bibliografía relacionada [22].

Las definiciones de las mallas simplex y las mallas triangulares ó "triangulaciones" están muy relacionadas. Más precisamente, sus grafos subyacentes son duales entre sí. Otra importante propiedad de las mallas simplex es su conectividad de vértices constante. En esta sección sólo se introducen las propiedades topológicas de las mallas simplex. Primero, se da una definición general de las mallas k-simplex, inmersas en un espacio euclidiano  $\mathcal{R}^d$  de dimensión d. Luego, se consideran las mallas 1 y 2-simplex para  $\mathcal{R}^3$  como representaciones de contornos y superficies.

## Definiciones de células y mallas simplex



**Figura 5.9** Ejemplos de  $p$ -células  $0 \leq p \leq 3$ .

Definimos una  $k$ -simplex como una unión de  $p$ -células,  $0 \leq p \leq k$ . Ya que estas células son mallas  $p$ -simplex, la definición de una célula es recurrente:

**Definición 5.9** Definimos una 0-célula de  $\mathfrak{R}^d$  como un punto  $P$  de  $\mathfrak{R}^d$  y una 1-célula como un segmento de  $\mathfrak{R}^d$ , por ejemplo, un par no ordenado de distintos vértices  $(P, M)$ . Recursivamente definimos una  $p$ -célula ( $p \geq 2$ )  $C$  de  $\mathfrak{R}^d$  como una unión de  $(p-1)$ -células tal que:

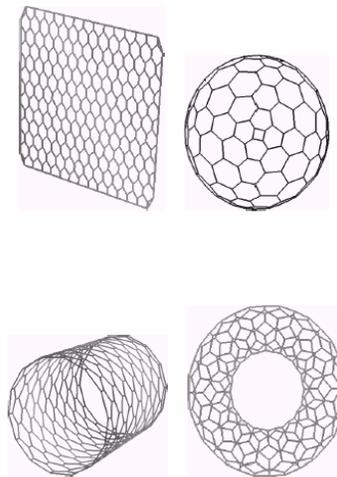
Cada vértices perteneciente a  $C$  pertenece a 'p' distintas  $(p-1)$ -células.  
La intersección de dos  $(p-1)$ -células es vacío o es una  $(p-2)$ -células.

Una 2-célula, es por lo tanto, un conjunto de segmentos que tienen uno y solamente un vértice en común. Por lo tanto, es una línea poligonal cerrada en  $\mathfrak{R}^d$ . Ejemplos de  $p$ -células se muestran en la figura 5.9. 0-células se llaman vértices, 1-células segmentos y 2-células caras.

Una malla simplex está definida simplemente como:

**Definición 5.10** Una malla  $k$ -simplex  $M$  de  $\mathfrak{R}^d$  es una  $(k+1)$ -célula de  $\mathfrak{R}^d$ .

Una malla  $k$ -simplex es por lo tanto una unión de  $k$ -células que siguen las propiedades de la definición 1. Ejemplos de mallas 2-simplex se muestran en la figura 5.10.



**Figura 5.10** Cuatro mallas 2-simplex genéricas

*Proposición 1. Una malla k-simplex es una malla (k+1)-conexa: cada vértice tiene (k+1) vértices vecinos.*

La conectividad constante entre vértices implica una relación simplex entre el número de vértices y el número de segmento. La tabla 5-1 resume la conectividad entre vértices, segmentos y caras, con las células de una malla k-simplex. Si una malla k-simplex es (k+1)-conexa, todas las mallas (k+1)-conexa no necesariamente son mallas simplex. Por ejemplo, una malla 3-conexa que tiene dos caras intersectadas por un segmento no puede ser una malla 2-simplex.

Tabla 5-1 Las relaciones de conectividad en una malla k-simplex

	Segmentos/Vértices	Caras/Vértices	Caras/Segmento
K=1	2	-	-
K=2	3	3	2

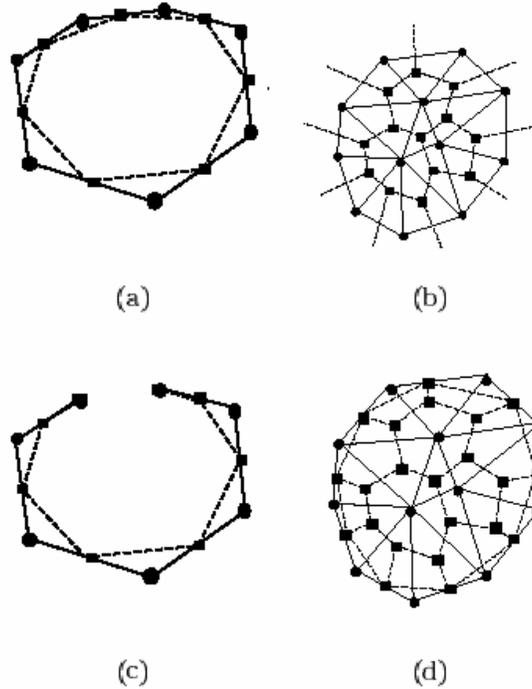
Escribimos el conjunto de n vértices de M como  $V(M)$  y su función de conectividad como  $N(M)$ . Si  $P_i$  es un vértice de una malla k-simplex M entonces  $(P_{N_0(i)}, P_{N_1(i)}, \dots, P_{N_k(i)})$  son sus (k+1) vecinos.

### 5.6.1 Dualidad con las triangulaciones

Es importante mencionar la naturaleza dual entre las mallas k-simplex y las k-triangulaciones. Las k-triangulaciones son conjuntos de p-simplicantes ( $0 < p \leq k$ ) que siguen reglas topológicas estrictas tales como la de la relación de Euler-Poincaré. De hecho, las k-triangulaciones son subconjuntos de conjuntos más generales de p-simplicantes, llamados k-simplicantes complejos.

Una  $k$ -triangulación está compuesta por  $p$ -simplicantes ( $0 \leq p \leq k$ ) que son  $p$ -caras de la triangulación. 0-caras son vértices, 1-caras los segmentos y 2-caras los triángulos.

Podemos definir una transformación topológica que asocia una malla  $k$ -simplex a una  $k$ -triangulación. Esta transformación es mostrada en la figura 5.11 y considera de forma diferente los vértices y los segmentos localizados en el borde de la triangulación de aquellos localizados “adentro”. Básicamente, esta transformación dual asocia una  $p$ -cara de una  $k$ -triangulación con una  $(k-p)$ -célula de una malla  $k$ -simplex.



**Figura 5.11** Dualidad entre  $k$ -triangulaciones ( $k=1,2$ ) dibujadas con líneas continuas y círculos sólidos, y mallas  $k$ -simplex dibujadas con líneas intermitentes y cuadrados como vértices. Dos primeras son triangulaciones sin fronteras y las otras dos tienen fronteras.

La tabla 5.2 resume la transformación entre una  $p$ -cara de una  $k$ -triangulación y una  $(k-p)$ -célula de una malla  $k$ -simplex. Para células y caras pertenecientes a un borde de una triangulación o de una malla simplex, la transformación dual se aplica de manera distinta. Vértices, segmentos y triángulos pertenecientes a una frontera de una  $k$ -triangulación son asociadas con dos células de una malla  $k$ -simplex: una  $(k-p)$ -célula y una  $(k-p-1)$ -célula ( $0 \leq p < k$ ) (ver tabla 5.3)

Tabla 5.2 Dualidad entre una  $k$ -triangulación y una malla  $k$ -simplex para caras internas

	1-Tr $\Leftrightarrow$ 1-MS	2-Tr $\Leftrightarrow$ MS
P=0	Vértice $\Leftrightarrow$ Segmento	Vértice $\Leftrightarrow$ Cara
P=1	Segmento $\Leftrightarrow$ Vértice	Segmento $\Leftrightarrow$ Segmento

Tabla 5.3 Dualidad entre una k-triangulación y una malla k-simplex para caras en la frontera

	1-Tr $\Rightarrow$ 1-MS	2-Tr $\Rightarrow$ 2-MS	1-MS $\Rightarrow$ 1-Tr	2-MS $\Rightarrow$ 2-Tr
P=0	Vértice $\Rightarrow$ Segmento	Vértice $\Rightarrow$ Cara	Vértice $\Rightarrow$ (nil)	Vértice $\Rightarrow$ (nil)
P=1	Vértice $\Rightarrow$ Segmento	Vértice $\Rightarrow$ Segmento		Segmento $\Rightarrow$ (nil)
		Segmento $\Rightarrow$ Segmento		
		Segmento $\Rightarrow$ Vértice		

En una malla compuesta por triángulos, es decir, una triangulación, existe una noción real de frontera del modelo, mientras que un triángulo no esté rodeado por tres triángulos. Pero en una malla simplex, la noción de una frontera, de un hoyo, es simplemente una célula “vacía”, ya que cada vértice está rodeado por  $(k+1)$  k-células.

Existen otras transformaciones duales que se han definido en las k-triangulaciones. Las más comúnmente estudiadas han sido las dualidades entre triangulaciones y complejos celulares a través de la dualidad de las triangulaciones Delaunay y los diagramas de Voronoi. Los diagramas de Voronoi son complejos celulares y la relación de dualidad con la triangulación de Delaunay es geométrica ya que depende de la posición de sus vértices. Por el contrario, la dualidad entre las triangulaciones y las mallas simplex es puramente topológica ya que no hay ninguna biyección geométrica entre las mallas simplex y las triangulaciones.

La inexistencia de dualidad geométrica puede ser probada al considerar el número relativo de grados de libertad de las mallas simplex y las triangulaciones. La geometría de una malla k-simplex no degenerada o de una k-triangulación no degenerada es determinada por el conjunto de coordenadas de sus vértices. Como sea, para  $k > 1$  el número de vértices  $V_{sm}$  de una malla k-simplex es diferente del número de vértices  $V_{tr}$  de una k-triangulación. Para  $k=2$  por ejemplo, para una triangulación sin hoyos teniendo un orden  $g$ , la relación de Euler da:

$$V_{tr} - \frac{V_{sm}}{2} = 2(1 - g)$$

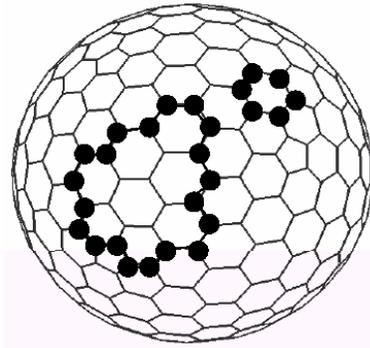
Por lo tanto, no podemos construir un homeomorfismo geométrico entre las triangulaciones y las mallas simplex ya que el espacio vectorial representante de sus espacios de posibles configuraciones son de diferente dimensión. Sólo para mallas 1-simplex, es posible el construir una 1-triangulación que es su dual geométrico porque tienen el mismo número de vértices. La equivalencia geométrica con las triangulaciones sólo puede existir si consideramos mallas k-simplex degeneradas, por ejemplo al restringir los polígonos convexos (mallas simplex convexas con caras planares).

La inexistencia de una transformación geométrica entre las mallas simplex y las triangulaciones implica que la deformación geométrica de una malla simplex no es

equivalente a la deformación geométrica de una triangulación. Este es la razón por la cual estas mallas son una representación de superficies distinta a la de las triangulaciones.

### 5.6.2 Contornos

Los contornos definidos en una malla 2-simplex son mallas 1-simplex, por ejemplo curvas poligonales cerradas. Son definidos como un conjunto de vértices vecinos tal que un vértice del contorno tiene dos y solamente dos vecinos que pertenecen al contorno (ver Figura 5.12). Los contornos pueden ser definidos alrededor de cualquier cara de la malla simplex, especialmente caras correspondientes a un hoyo.



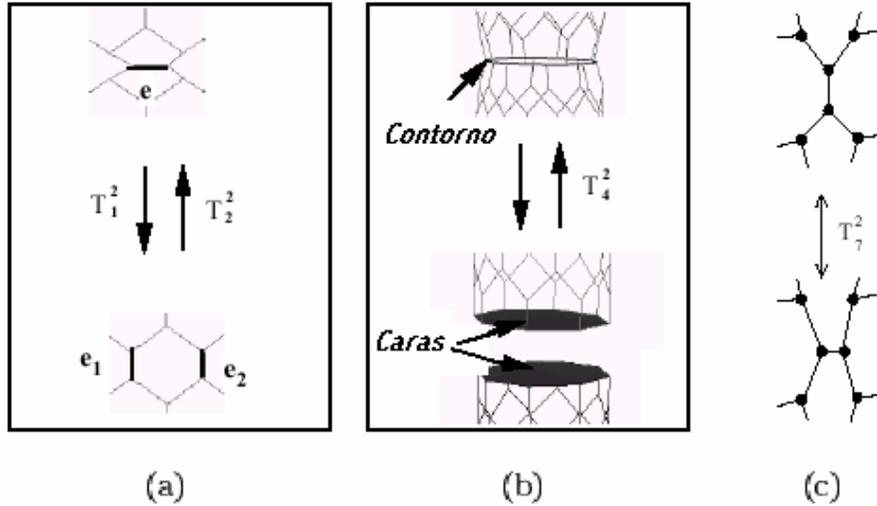
**Figura 5.12** Dos contornos definidos en una malla 2-simplex. El de más a la derecha delimita una cara de la malla.

Los contornos son considerados como modelos deformables móviles independientemente de la malla. La superficie de la malla está por lo tanto vinculada a vértices de un contorno que establecen las condiciones de frontera para la deformación de la malla. La definición de los contornos permite un gran control sobre la forma de la malla simplex.

### 5.6.3 Transformación de la malla

Las mallas simplex, al igual que las triangulaciones no tienen estructura por lo que pueden ser refinadas ó diseminadas localmente. Adicionalmente, las mallas simplex pueden ser cortadas a lo largo de contornos y crear manejadores de superficies.

Se pueden definir cuatro operadores topológicos básicos en una malla simplex  $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$ , descritos en la figura 5.13. Los primeros dos operadores, son Eulerianos ya que no modifican el orden de la malla. Por otro lado,  $T_3^2$  y  $T_4^2$  son meta-operadores ya que pueden romper la malla en dos piezas, o cambiar su orden (el número de manejadores de superficies). Todas las transformaciones topológicas pueden ser descompuestas en un conjunto de estos cuatro operadores.



**Figura 5.13** (a) los dos operadores Euleriano  $T_1^2$  y  $T_2^2$  definidos en mallas simplex; (b) Los dos meta-operadores  $T_3^2$  y  $T_4^2$ ; (c) El operador de conmutación de segmento  $T_7^2$ .

#### 5.6.4 Geometría de las mallas simplex

En esta sección se presenta las principales relaciones geométricas que existen en una malla 2-simplex de  $\mathfrak{R}^3$ . Existen resultados similares para mallas 1-simplex de  $\mathfrak{R}^3$  (por ejemplo contornos tridimensionales). El principal resultado consiste en una ecuación simplex que da la posición de un vértice en relación a sus vecinos y algunas cantidades geométricas: el ángulo simplex y los parámetros métricos.

En una malla 2-simplex tridimensional  $M \in \mathfrak{R}^3$  como un vértice  $P_i$  está rodeado por sus tres vértices  $(P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)})$ . Estos tres puntos definen el plano tangencial a  $P_i$  cuyo vector normal  $n_i$  es:

$$n_i = \frac{P_{N1(i)} \wedge P_{N2(i)} + P_{N2(i)} \wedge P_{N3(i)} + P_{N3(i)} \wedge P_{N1(i)}}{\|P_{N1(i)} \wedge P_{N2(i)} + P_{N2(i)} \wedge P_{N3(i)} + P_{N3(i)} \wedge P_{N1(i)}\|}$$

Siendo  $P_{Nm(i)} \wedge P_{Nn(i)}$  el producto vectorial entre  $P_{Nm(i)}$  y  $P_{Nn(i)}$  con  $n \neq m$ , y  $n, m \in \{1,2,3\}$

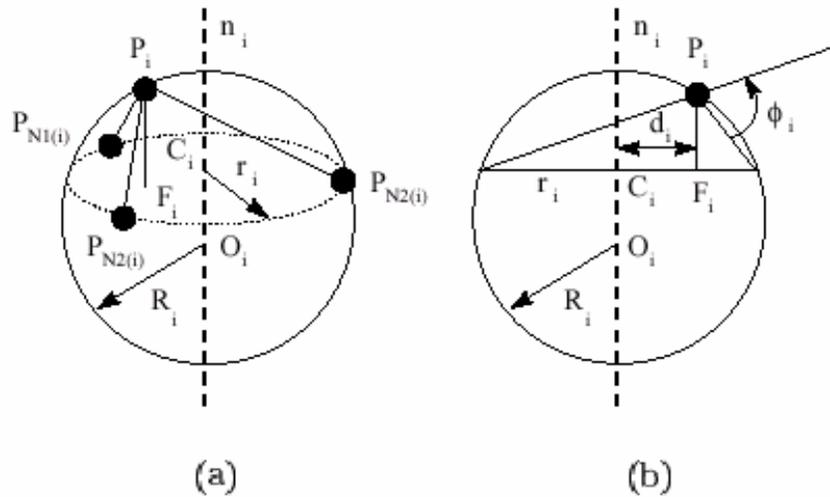
Introducimos el círculo  $S_1$  de centro  $C_i$  y radio  $R_i$  circunscrito al triángulo  $P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)}$ . Introducimos también la esfera  $S_2$  de centro  $O_i$  y radio  $R_i$ , circunscrita a los cuatro vértices  $P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)}$ .

El ángulo simplex  $\alpha = \angle(P_i, P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)})$  (un tipo de “ángulo promediado”) en  $p_i$  está definido por dos ecuaciones:

$$\alpha_i \in [-\Pi, \Pi]:$$

$$\text{seno}(\alpha_i) = \frac{r_i}{R_i} \text{sign}((P_{N1(i)} - P_i) \cdot n_i), \text{ sign es la función "signo"}$$

$$\text{coseno}(\alpha_i) = \frac{\|C_i - O_i\|}{R_i} \text{sign}((C_i - O_i) \cdot n_i)$$



**Figura 5.14** (a) La esfera circunscrita  $S_2$  de radio  $R_i$  y el círculo circunscrito  $S_1$  de radio  $R_i$ . b) Proyección de (a) en el plano  $(O_i, C_i, P_i)$ . El ángulo simplex puede ser interpretado como un ángulo de geometría planar.

El ángulo simplex tiene varias propiedades, en particular, hay una relación simple entre el ángulo simplex  $\alpha_i$  y la curvatura  $H_i = \frac{1}{R_i}$ , también llama la curvatura media en el vértice  $P_i$ :

$$H_i = \frac{\text{seno}(\alpha_i)}{r_i}$$

De un vértice  $P_i$ , introducimos la proyección ortogonal  $F_i$  de  $P_i$  en el triángulo  $P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)}$ . Los parámetros métricos en el vértice  $P_i$  son las coordenadas baricéntricas de  $F_i$  con respecto al triángulo  $P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)}$ :

$$F_i = \varepsilon_{1i} P_{N1(i)} + \varepsilon_{2i} P_{N2(i)} + \varepsilon_{3i} P_{N3(i)}$$

$$\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i} + \varepsilon_{3i} = 1$$

El ángulo simplex con dos parámetros métricos  $\varepsilon$  (que se definen más adelante) representa la posición de  $P_i$  con respecto a sus tres vecinos:

$$P_i = \varepsilon_{1i} P_{N1(i)} + \varepsilon_{2i} P_{N2(i)} + \varepsilon_{3i} P_{N3(i)} + L(r_i, d_i, \alpha_i) n_i$$

Donde:

$r_i$ : es el radio del círculo circunscrito en el triángulo  $(P_{N1(i)}, P_{N2(i)}, P_{N3(i)})$ .

$d_i$ : es la distancia entre  $F$  y el centro  $C_i$  del círculo circunscrito

$L(r_i, d_i, \alpha_i)$ : está definido como:

$$L(r_i, d_i, \alpha_i) = \frac{(r_i^2 - d_i^2) \tan(\alpha_i)}{\varepsilon \sqrt{r_i^2 + (r_i^2 - d_i^2) \tan^2(\alpha_i)} + r_i}$$

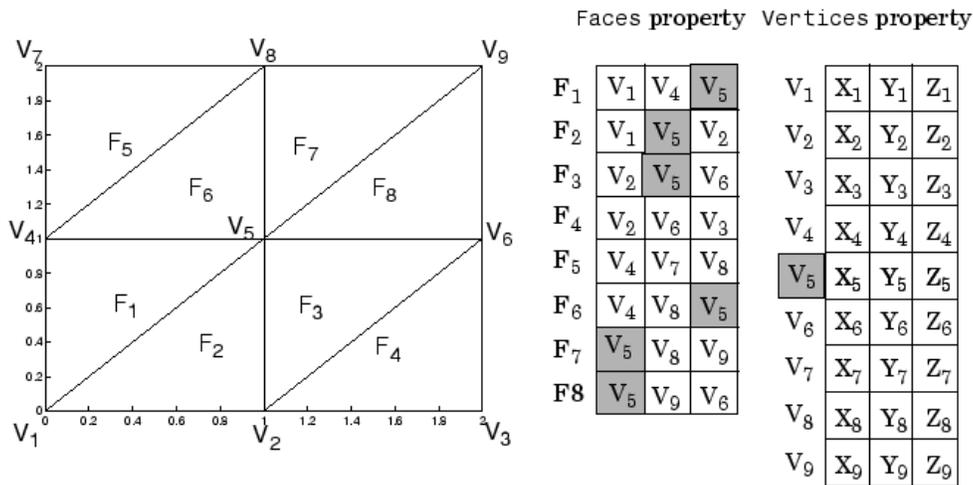
con:

$$\varepsilon = 1 \quad si \quad |\alpha_i| < \frac{\Pi}{2}$$

$$\varepsilon = -1 \quad si \quad |\alpha_i| > \frac{\Pi}{2}$$

El ángulo simplex y los parámetros métricos definen la silueta local alrededor de un vértice dado. El ángulo simplex controla la curvatura media local, i.e., la elevación con respecto al plano tangente. Los parámetros métricos controlan la posición del vértice en el plano tangente con respecto a sus tres vecinos. En otras palabras, los parámetros métricos cambian la “parametrización” local donde el ángulo simplex cambia la curvatura extrínseca de la superficie.

## 5.7 Estructuras Face-vertex



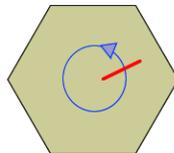
**Figura 5.15** Ejemplo de una estructura face-vertex.

OpenGL y la mayoría de los actuales API's para hacer graficos 3D están basadas en dibujar una secuencia de caras, usualmente triángulos.

Una malla poligonal es una lista de caras que juntas forman la piel de un objeto, ésta es una manera estándar de representar una amplia clase de formas en gráficos.

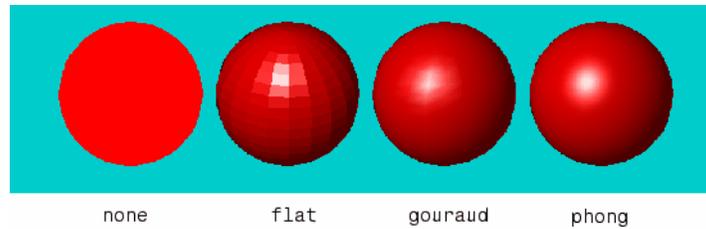
En el ejemplo mostrado en la figura 5.15 tenemos una estructura faces-vertex, cada fila de la matriz de caras indica las conexiones del polígono, note como algunas caras comparten vértices entre ellas, por ejemplo el vértice 5, con este tipo de estructura hacemos más eficiente el manejo de memoria.

Debemos definir cada uno de los vértices que forman al polígono en sentido contrario a las manecillas del reloj, así, de manera implícita indicamos cual es la dirección de la normal.



**Figura 5.16** Definiendo vértices del polígono para indicar dirección de la normal.

Teniendo controladas las direcciones de las normales podemos agregar efectos de luz y sombreado a nuestro objeto 3D.



**Figura 5.17** Efectos de iluminación en una esfera.

## 5.8 Objetos fractales

El matemático francés Benoit Mandelbrot acuñó la palabra fractal en la década de los '70, derivándola del adjetivo latín *fractus*. El correspondiente verbo latino: *frangere*, significa romper, crear fragmentos irregulares.

¿Por qué análisis fractal?

La geometría tradicional, la euclídea, es la rama de la matemática que se encarga de las propiedades y de las mediciones, tales como puntos, líneas, planos y volúmenes. La geometría euclídea también describe los conjuntos formados por la unión de los elementos antes mencionados, cuyas combinaciones forman figuras o formas específicas.

Sin embargo, las formas encontradas en la naturaleza como montañas, franjas costeras, sistemas hidrográficos, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve y un sinnúmero de otros objetos no son fácilmente descritos por la geometría tradicional.

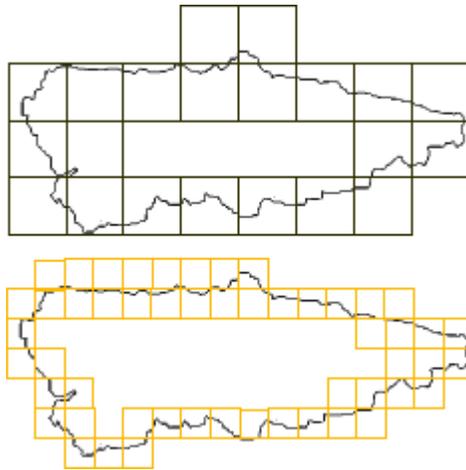
La geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza. Éstas poseen a veces una remarcable invarianza a la simplificación bajo los cambios de la magnificación, propiedad que caracteriza a los fractales.

Los objetivos comunes del análisis fractal incluyen:

- Determinar si el objeto bajo prueba es autosimilar o autoafín
- Determinar fenómenos sobre la formación o degradación
- Descubrir procesos múltiples y determinar las escalas sobre los cuales son dominantes
- Interpolar y extrapolar escalas diferentes
- Desarrollar una ecuación empírica para estimar algún parámetro de difícil medición

### 5.8.1 El concepto de fractal

La idea del fractal fue concebida aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Más tarde los estudios se extendieron fundamentalmente por los trabajos acerca de la teoría de conjuntos de matemáticos como George Cantor (1872), Helve Von Koch (1904), Waclaw Sierpinsky (1916) y Gaston Julia (1918). Pero las dimensiones fraccionales fueron discutidas hasta 1919, cuando el matemático alemán Felix Hausdorff establece una manera de medir el tamaño de un objeto al dividir el espacio en pequeños conjuntos (círculos, cuadrados u otros) de tamaño  $r$  (diámetro, arista y demás) y contar el número  $N(r)$  necesitado para realizar la cobertura del objeto (ver figura 1.3)



**Figura 5.18** Cobertura con cuadrados de tamaño  $r$  para obtener la medición de una curva.

Se puede establecer una función que relaciona la dimensionalidad (longitud, área, volumen) con un exponente  $d$  a través de la medida hausdorff:

$$M(d) = \inf \sum r^d = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^d = \gamma_0$$

Donde  $\gamma_0$  es la medición debida al menor tamaño posible de  $r$  (ínfimo). Los resultados para la curva y la superficie se muestran en la tabla 1.1.

Tabla 5.4

Medida de hausdorff	Para la curva de longitud $L_0$	Para la superficie con area $A_0$
Longitud	$M(1) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r = \lim_{r \rightarrow 0} L_0 \cdot r^0 = L_0$	$M(1) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r = \lim_{r \rightarrow 0} A_0 \cdot r^{-1} = \infty$
Área	$M(2) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} L_0 \cdot r^1 = 0$	$M(2) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} A_0 \cdot r^0 = A_0$
Volumen	$M(3) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^3 = \lim_{r \rightarrow 0} L_0 \cdot r^2 = 0$	$M(3) = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^3 = \lim_{r \rightarrow 0} A_0 \cdot r^1 = 0$

Se nota que para un determinado objeto sólo existe una medida  $\gamma_0$  que es útil para describir su tamaño, al exponente de  $r$  que define dicha medida se le conoce como dimensión de Hausdorff ( $D_H$ ) y se define cuando  $M(d)$  pasa de cero a infinito.

$$M(d) = \inf \sum r^d = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > D_H \\ \gamma_0, & d = D_H \\ \infty, & d < D_H \end{cases}$$

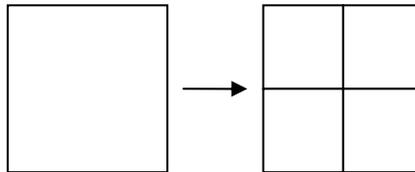
Más tarde el matemático ruso A. Besicovitch simplifica el trabajo de Hausdorff al considerar que si un objeto Euclidiano reduce su tamaño en  $1/r$  en cada dirección espacial, se obtendrán  $N(r)$  replicas que conservan la misma topología que la original, es decir:

Si se toma una línea y se divide en dos partes, es decir  $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$  se tendrán dos segmentos topológicamente iguales al original.



**Figura 5.19** División de una línea en dos, produciendo así dos replicas topológicas.

Asimismo si se divide en dos cada lado del cuadrado, se tendrán cuatro cuadrados iguales al original.



**Figura 5.20** División de los lados de un cuadrado, produciendo así cuatro réplicas topológicas.

Y ahora, si se toma un cubo y se divide en dos todos sus lados, se tendrán ahora ocho cubos iguales al original.

En resumen podemos observar:

Tabla 5.5

Figura	Dimensión topológica	Número de copias
Línea	1	$2 = 2^1$

Cuadrado	2	$4 = 2^2$
Cubo	3	$8 = 2^3$
	d	$N = r^d$

Se nota que al dividir en dos cada lado de una figura regular euclidiana, el número de replicas similares a la original es  $N(2) = 2^d$ , en donde  $d$  es la dimensión topológica de la figura. Además, esa relación no se altera si en lugar de dividir una figura se duplica su dimensión, por lo tanto el número de figuras similares al original se puede representar con la relación  $N(r) = r^d$

Resolviendo la ecuación para  $d$

$$\log [N(r)] = \log (r^d)$$

Por leyes de los logaritmos

$$d = \frac{\log [N(r)]}{\log (r)}$$

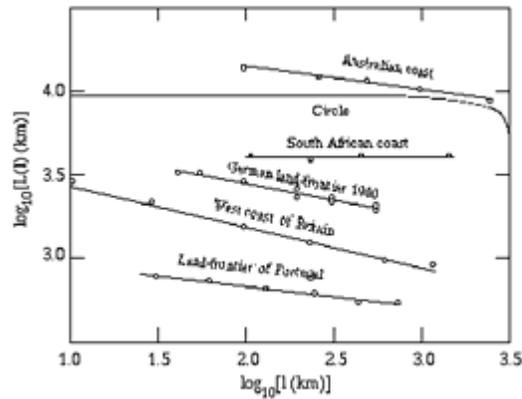
Se observa que para un objeto irregular que altere la proporción  $N(r) \leftrightarrow r$ , el valor  $d$  no necesariamente será un valor entero como sucedería en una figura regular euclidiana. Por lo que se hablaría de una geometría fraccional y esa es la principal característica para llamarlos fractales.

A este tratamiento se conoce como dimensión de Hausdorff-Besicovitch, sin embargo, durante mucho tiempo se consideró al estudio de tales formas como “patologías” sin ninguna importancia. Hasta que en 1967 Mandelbrot, basándose en los trabajos de Hausdorff y Besicovitch publica el artículo “How long is the coast of Britain?”. Como con cualquier otra curva, la respuesta intuitiva de un matemático es aproximar la curva con segmentos de tamaño  $r$ . Entonces, evaluando la suma de esos segmentos conforme  $r$  se hace muy pequeña es decir  $r \rightarrow 0$ , se esperaba ver un acercamiento a la longitud, desgraciadamente se encontró que la longitud de la costa tendía a ser infinita, es decir,  $\lim_{r \rightarrow 0} L(r) \rightarrow \infty$ . Este comportamiento se explica que al considerar que entre menor sea el segmento  $r$  utilizado, más detalle de la costa será tomada en cuenta, que antes no era (ver figura 5.18). Así la nueva estimación total de longitud parecerá aumentar cada vez que  $r$  se reduce.



**Figura 5.21** Costa de Gran Bretaña.

Mandelbrot analiza los datos recogidos por Richardson para algunas costas y fronteras. La costa de Bretaña tiene  $d=1.3$  y la circunferencia  $d=1$ , como se esperaba.



**Figura 5.22** Se muestra la relación lineal de la longitud de diferentes costas.

De este modo, de la aproximación lineal  $\log[L(r)] = m \cdot \log(r) + b$  para cada costa mostrada en la figura 5.22 se puede obtener la relación (por leyes de logaritmos):

$$L(r) = 10^b \cdot r^m$$

Mandelbrot encontró que la pendiente  $m$  del ajuste lineal de los puntos de la gráfica es igual a  $1-D$ , en donde  $D$  representa la dimensión de Hausdorff.

$$L(r) = 10^b \cdot r^m = 10^b \cdot r^{1-D}$$

En general, mientras “más tortuosa” sea la línea, la pendiente será más pronunciada y la dimensión Hausdorff de mayor valor. Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero, los objetos reales son producidos por procesos que actúan sólo sobre un intervalo de escalas finitas. En

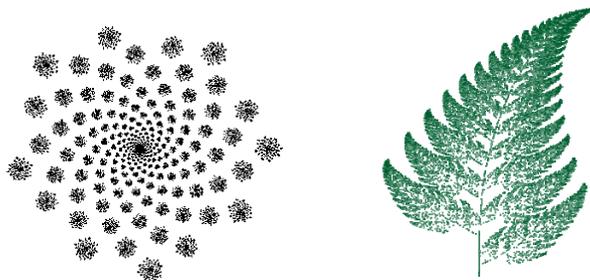
otras palabras, los objetos reales no tienen la infinita cantidad de detalles que los fractales. Los fractales, por lo tanto, surgen de las características mencionadas anteriormente y son una nueva herramienta para caracterizar, explicar y modelar objetos de forma compleja a través de la relación existente entre la morfología y el escalamiento geométrico.

### 5.8.2 Geometría fractal

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch calculada a través de un graficado log-log provee una manera de medir qué tan tortuosa es una curva. Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2, y los volúmenes 3. A esta dimensión se le llama dimensión “topológica”. Sin embargo, una curva que recorre una superficie puede ser tan tortuosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Se puede pensar entonces la tortuosidad como un incremento en la dimensión, así una línea tortuosa tendrá una dimensión fraccional mayor a la dimensión topológica 1, menor a la dimensión topológica 2.

Por esa razón Mandelbrot definió a un “*objeto fractal*” como: un conjunto para el cual su dimensión Hausdorff-Besicovitch es mayor a su dimensión topológica. Esta definición aunque correcta y precisa excluye algunos objetos que tienen características fractales pero su dimensión fractal es igual a la topológica. Por ello estableció una definición alternativa menos matemática: “*Un fractal es una forma rugosa o fragmentada que puede ser dividida en partes, cada una de las cuales (al menos aproximadamente), es una copia reducida de la totalidad*”. Esta definición utiliza el concepto de autosimilaridad, en la que un objeto es autosimilar si el objeto puede ser dividido en piezas de tamaño arbitrario y cada una de esas piezas es una réplica de la totalidad.

Sin embargo, existe un problema con esta definición, que sólo se permite cambiar la escala de observación con transformaciones isotrópicas, por ejemplo, para una escala definida por las coordenadas  $x$  y  $y$ , el cálculo de la dimensión fractal no se alterará si la escala varía  $x \rightarrow ky$  y  $y \rightarrow ky$  en donde  $k$  es un factor de amplificación o reducción, que si se define por una función se tendrá  $f(x,y)=f(kx, ky)$ . Sin embargo se ha notado que algunos objetos conservan sus características originales sólo si la escala de observación varía de manera anisotrópica, a estos fractales Mandelbrot les denominó *autoafines*. Es decir,  $f(x, y)=f(ax, a^H y)$  en donde el exponente  $H$  se le conoce como el exponente de Hurst.



**Figura 5.23** Ejemplo de fractales a) autosimilar b) autoafín.

### 5.8.3 El exponente de Hurst y la estructura fractal

Harold Edwin Hurst trabajó extensivamente en el proyecto del Dique del Río Nilo en el cual usaba los registros del comportamiento del río de 847 años que los egipcios habían mantenido. Muchos hidrólogos presumieron que la afluencia en un depósito era un proceso completamente aleatorio, sin embargo al examinar los registros Hurst intuyó que los datos no representaban una estructura aleatoria, aunque los métodos estadísticos normales no mostraran ninguna correlación entre las observaciones. Así, Hurst desarrolló un nuevo conjunto de herramientas estadísticas para examinar datos que no puedan fundamentarse en una distribución Gaussiana.

Einstein había hecho un estudio extensivo sobre el movimiento browniano el cual llegó a ser el modelo principal para recorridos aleatorios. Einstein descubrió que la distancia cubierta por una partícula que experimenta colisiones aleatorias desde todos los lados está directamente relacionada con la raíz cuadrada del tiempo. Así:

$$R = k \cdot T^{0.5}$$

Donde  $R$  es la distancia cubierta,  $k$  es una constante y  $T$  es el intervalo del tiempo.

Analizando el intervalo reescalado ( $R/S$ ), Hurst sugirió una generalización del movimiento Browniano que se podría aplicar a una clase más grande de serie de tiempo. Su ecuación general es:

$$\frac{R}{S} = k \cdot n^H$$

Donde :

$\frac{R}{S}$  : intervalo de reescalado (Range/Standar )

$n$ : intervalo o tiempo de observación

$k$ : constante para la serie de tiempo

$H$ : exponente de Hurst

Así Hurst generalizó la ley de Einstein  $T^{0.5}$  a la ley  $T^H$ . Análogamente, el movimiento Browniano puede ser generalizado a movimiento Browniano fraccional, el cual existe cuando el exponente de Hurst está definido.

El valor  $\frac{R}{S}$  es llamado el intervalo de reescalado (rescaled range) y es una relación de dimensionalidad, la cual se forma al dividir el intervalo de tiempo con la desviación estándar del intervalo. Las escalas vistas como un incremento del tiempo ( $n$ ) determinadas por un valor en la ley de potencia es igual a  $H$ . Este es el punto clave en el análisis de Hurst: al reescalar pudo comparar diversos datos, incluyendo periodos de tiempo que pueden estar separados por muchos años. Este tipo de análisis puede usarse para describir series de tiempo o conjuntos de datos que no posean características autosimilares.

Si el sistema medido está independientemente distribuido, o siguiendo un camino aleatorio, la ecuación tomará la regla de Einstein  $T^{0.5}$ , el valor del exponente de Hurst será de 0.5.

Entonces hay tres posibilidades de valores de H

$H = 0.5$  Corresponde a series independientes (ruido café o ruido Browniano): La serie es un recorrido aleatorio.

$0 \leq H < 0.5$  Series antipersistentes (ruido rosa): El sistema cubre menos distancia que un camino aleatorio. Así, tiene la tendencia para revertirse a sí mismo frecuentemente. Si crece, es más probable que disminuir en el próximo periodo. O si decrecer, es más probable que aumentar. Sólo una serie de tiempo se ha descubierto con esta propiedad: La volatilidad de los mercados.

$0.5 < H \leq 1$  Serie persistente (ruido negro): Esta serie cubre más distancia que un recorrido aleatorio. Así, si el sistema se incrementa en un periodo, es más probable que mantenga la tendencia de aumentar en el periodo inmediato siguiente. A esto se le conoce usualmente como efecto José, el que tiende a conducir a “siete años” de fortuna seguido por “siete años” de hambruna. Tal serie tiene la potencialidad para representar catástrofes súbitas.

El exponente de Hurst es una medida útil para distribuciones fractales, puesto que presenta algunas características importantes:

$1/H$  es la dimensión fractal del espacio probabilidad. Nótese que un recorrido aleatorio tiene una dimensión fractal de  $1/0.5 = 2$ , llenando así completamente el espacio donde se desarrolla.

$2-H$  es la dimensión fractal de la serie de datos.

La estimación de H puede ser encontrada al tomar la pendiente de un graficado log-log de  $\frac{R}{S}$  contra  $n$  como se muestra en la ecuación siguiente:

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) = \log(k) + H \cdot \log(n) = \log(k \cdot n^H)$$

Si no hay memoria presente a largo plazo, el entremezclar los datos no debería tener efecto sobre esta estimación de H. No obstante, si se destruye la estructura al aleatorizar los datos, la estimación de H debería ser mucho menor. Por lo tanto, el exponente de Hurst es una medida significativa de la “memoria” de un sistema.

#### 5.8.4 Dimensión fractal

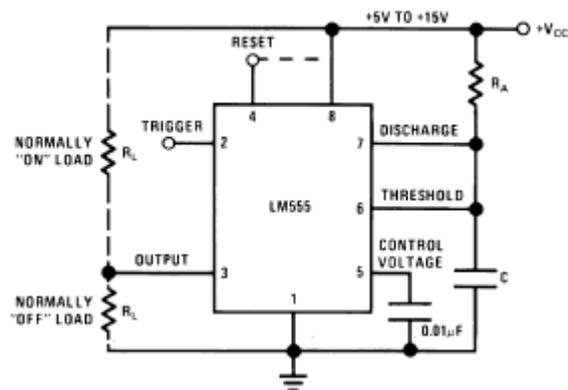
El término *dimensión fractal* se usa indiscriminadamente en la literatura estudiada para definir una variedad de dimensiones específicas. Cada una de estas se usa para caracterizar aspectos diferentes de la naturaleza fractal de un objeto. A menudo, esas dimensiones son una aproximación a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y se les denomina en función del cálculo utilizado. Existen dos métodos principales para ello que son el análisis de la longitud del perímetro y el análisis de la masa.

## 6. Implementación

### 6.1 Adquisición de imágenes

### 6.2 Sincronización de imágenes

Dado que se realiza una captura independiente de imágenes, encontramos la necesidad de poder sincronizar las imágenes en el video, para lo cual, implementamos un circuito sencillo que genera una señal luminosa, esa señal será buscada dentro de los videos, y con ello se garantiza que se obtengan dos cuadros concurrentes del fenómeno. La señal luminosa se generó a través de un sencillo circuito electrónico, mostrado en la figura 6.1.



**Figura 6.1** Circuito sencillo de generación de haz de luz.

Para el diseño del circuito se ocupó el timer LM555 que es un dispositivo altamente estable para generar tiempos de retardo u oscilación exactos. Nosotros lo utilizamos para generar tiempos de retardo, el tiempo es controlado por un resistor y un capacitor externo, él puede ser disparado en el flanco de bajada.

Con el circuito generamos una luz con un diodo láser cuyo tiempo de encendido es de 1/30 de segundo, con ello llevo a cabo la sincronización buscando el cuadro en el video donde se produjo la señal.

### 6.3 Procesamiento digital de imágenes

En esta sección daremos cada uno de los algoritmos que son utilizados para nuestro proyecto, a los cuales ya se ha dado una introducción teórica. De manera didáctica trabajaremos con un ejemplo no necesariamente una descarga donde veremos cada uno de los efectos causados por cada uno de los algoritmos.

Las imágenes de trabajo son las siguientes



Figura 6.5 Proyección lateral y superior de un objeto.

### 6.4 Reconstrucción tomográfica

El algoritmo que utilizamos para hacer la reconstrucción tomográfica no fue uno de los métodos clásicos para hacer reconstrucciones; aprovechando el hecho de que solo estamos utilizando dos proyecciones, propusimos un método alternativo que es más eficiente puesto que no tiene que hacer el cálculo de la transformada. El algoritmo es el siguiente:

Dadas dos proyecciones  $P_\theta$  cuyos ángulos  $\theta$  son ortogonales, una reconstrucción  $R \in \mathfrak{R}^3$  esta dada por:

*ProyecciónSuperior*  $\leftarrow$  imagen de  $M \times N$  de la vista superior

*ProyecciónLateral*  $\leftarrow$  imagen de  $L \times M$  de la vista lateral

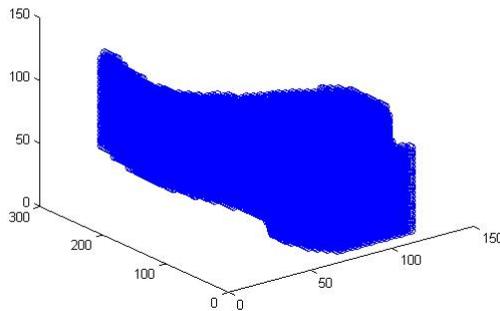
$I \leftarrow$  arreglo de  $M \times N \times L$

Para cada  $(i, j, k) \in I$

Si la *ProyecciónSuperior*( $i, j$ ) y *ProyecciónLateral*( $k, i$ ) = 1

$R(i, j, k) \leftarrow 1$

La reconstrucción del objeto, según el algoritmo propuesto para nuestras imágenes de trabajo es la siguiente.



**Figura 6.6** Reconstrucción tomográfica de imágenes de trabajo.

Como podemos apreciar en la figura 6.6, la reconstrucción tiene un aspecto ligeramente cuadrado, esto es efecto de utilizar sólo dos proyecciones, en otras palabras si hacemos un corte transversal de nuestro objeto  $R$ , como una rebanada, podemos observar que ella será una superficie rectangular.

Esto es un problema, puesto que, sabemos de antemano que el canal de la descarga tiene una difusión longitudinal y transversal por lo que un corte transversal del canal tiene forma elíptica.

Para solucionar este problema hemos implementado un algoritmo al que le hemos llamado *realce* que veremos a continuación.

## 6.5 Realce

Como planteamos anteriormente, a nuestra primera reconstrucción debemos de aplicarle un algoritmo el cual nos permita llevar los cortes transversales de nuestro objeto, de superficies cuadradas a una superficie que contenga una elipse inscrita al rectángulo.

Para realizar esto hicimos uso de las ecuaciones paramétricas de la elipse, sólo por recordar, las ecuaciones paramétricas son ligeramente parecidas a las funciones, ellas nos permitirán usar valores arbitrarios llamados parámetros, en lugar de variables independientes en ecuaciones. Mismas que en cambio proveen valores para variables dependientes.

La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de dicho plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos fijos. Estos puntos fijos se denominan *focos*. Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \beta \\ y &= b \sin \beta \end{aligned} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Con el algoritmo siguiente podemos hacer el realce de nuestra reconstrucción

Para cada corte transversal  $c_i \in R$

$l_1, l_2 \leftarrow$  Encuentra longitud de los lados de  $c_i$

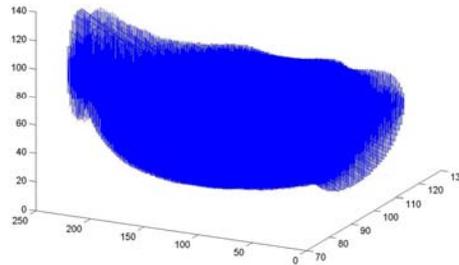
centro  $\leftarrow$  Encuentra centro de masa

$r_1, r_2 \leftarrow$  Radios que forman elipse  $\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}$

$c_i \leftarrow$  Traza el elipse con base a sus ecuaciones

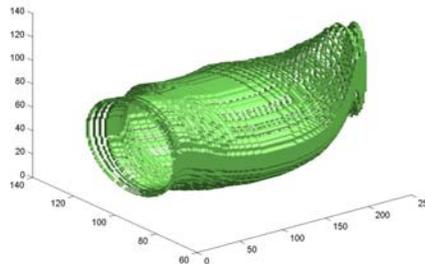
$$\begin{aligned} x_i &= r_1 \cdot \cos(\alpha) & -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ y_i &= r_2 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

En la siguiente figura podemos apreciar reconstrucción después del tratamiento de realce.



**Figura 6.7** Reconstrucción tomográfica de imágenes de trabajo aplicando realce.

Claramente podemos ver que hubo una reducción en la cantidad de muestras que forman al objeto puesto que hemos dejado solamente el cascarón, además de obtener el efecto que esperábamos de darle forma elíptica a cada uno de los cortes transversales. En la figura siguiente hacemos más visible lo que hemos venido planteando, haciendo una reconstrucción de superficie por medio de isosuperficies.



**Figura 6.8** Reconstrucción por isosuperficies de la reconstrucción tomográfica tratada con realce.

Cómo planteamos en la metodología nuestro algoritmo de reconstrucción de superficies no serán las isosuperficies, sino las mallas simplex, sin embargo se nos ha hecho bastante practico mostrar los resultados intermedios por medio de está técnica.

## 6.6 Optimización para la reconstrucción de superficie por mallas

Como se propuso en la problemática del presente proyecto, del trabajo realizado por Rangel [17] se observó que en secciones relativamente grandes del canal no existen grandes variaciones a lo largo de la reconstrucción (véase figura 2.2).

Propusimos entonces, un algoritmo que trabaja con el cálculo del gradiente.

$$\nabla R = \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z}$$


El objetivo del algoritmo es modificar la reconstrucción  $R$  a una reconstrucción optimizada  $R_o$  donde se busca sólo existan elipses en los cortes transversales del canal si existe un cambio grande en el gradiente.

El algoritmo propuesto es el siguiente

```

 $C_i \leftarrow \text{encuentra primer elipse}( R )$ 
 $a_x, a_y \leftarrow \text{da el punto más alto de la elipse}( c_i )$ 
 $\text{umbral de gradiente} \leftarrow \text{valor}$ 
 $x \leftarrow 1$ 
 $\text{gradiente} \leftarrow 0$ 
 $\text{gradAnt} \leftarrow 0$ 

```

Mientras haya elipse  $c_i$  en los cortes transversales de  $R$

```

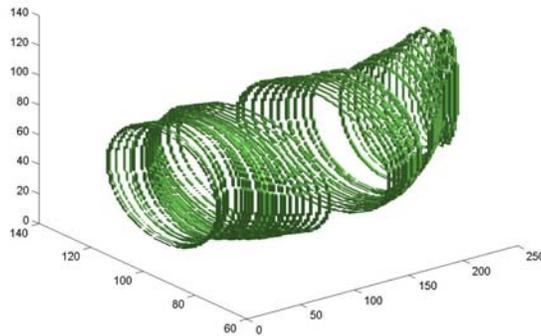
 $x \leftarrow x + 1$ 
 $b_x, b_y \leftarrow \text{da el punto más alto de la elipse}( c_{i+1} )$ 

 $\text{gradiente} \leftarrow \text{Calcula gradiente}( a_x, a_y, b_x, b_y, x )$ 

si  $\text{abs}( \text{gradiente} - \text{gradAnt} ) > \text{umbral}$ 
 $\text{gradAnt} \leftarrow \text{gradiente}$ 
 $a_x, a_y \leftarrow b_x, b_y$ 
 $x \leftarrow 0$ 
sino
 $\text{Elimina elipse}( c_i )$ 

```

Veamos cual es el efecto de aplicar este algoritmo en la reconstrucción que hemos venido trabajando



**Figura 6.9** Efecto de aplicar algoritmo de optimización a la reconstrucción.

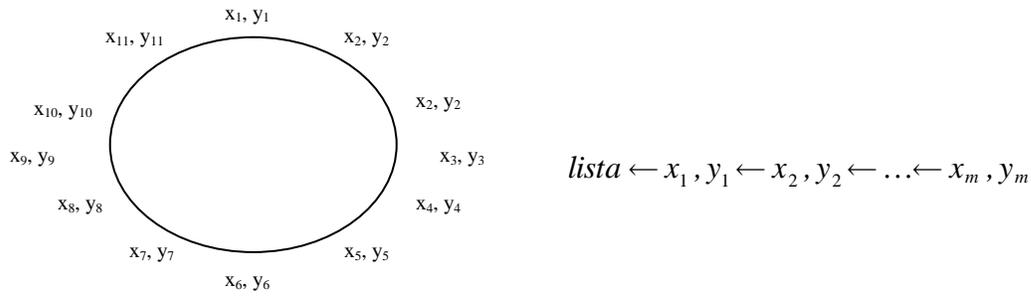
En la figura 6.9, claramente vemos que en las zonas donde no existen variaciones significativas en la forma del objeto fue eliminada la información, puesto que ella no nos es útil para el método de reconstrucción que utilizaremos. Debido a que se coloca una malla sobre la superficie del objeto, en los espacios donde no hay nada quedarán cubiertos por un conjunto de polígonos que se entretejen de una manera especial.

## 6.7 Mallas Simplex

Por fin hemos llegado a la etapa donde hacemos la reconstrucción de la superficie por el malleo simplex, al aplicarla a nuestra reconstrucción tendremos una reducción de la cantidad de polígonos que representan a la descarga, gracias al algoritmo de optimización presentado anteriormente.

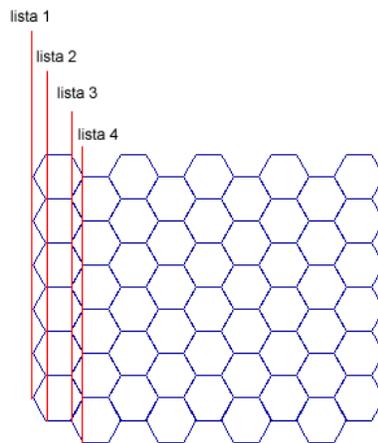
El algoritmo propuesto para reconstruir la superficie por mallas está basado en el conocimiento *a priori* de la descarga, ya que sabemos que el canal de la descarga será un objeto de forma tubular. También, para construir el algoritmo debemos tener en cuenta las bibliotecas de graficación 3D, ellas nos ayudarán a hacer más eficiente el renderizado en pantalla, algunas de sus funciones piden ciertos requerimientos, como el hecho de que, si requiere mostrar un objeto construido con mallas, las funciones piden como argumento estructuras de tipo faces-vertex, las cuales hacen un manejo eficiente de la memoria. El resultado de nuestro algoritmo será una malla representada por una estructura faces-vertex, con ello al momento de llevar a renderizado por biblioteca a las reconstrucciones, no existan problemas de compatibilidad de tipos.

El algoritmo hace uso de una función que permite tener una lista ligada en la que se contiene el muestreo de cada uno de los píxeles que forman la elipse; con ello podremos hacer después una decimación, esto es un submuestreo, y entonces se podrá tener una reducción de la densidad de la malla.



**Figura 6.10** Obtención de lista de píxeles que forman a un corte transversal.

Con el algoritmo a lo largo de todo el canal irá obteniendo cuatro listas de cortes transversales (elipses) adyacentes, recordemos que esos elipses solo existirán en donde hay información representativa del canal. Con esas cuatro listas de manera automática se generarán una lista de polígonos (caras) donde cada uno de los vértices del polígono estará representado por otra lista de vértices.



**Figura 6.11** Obtención de cuatro listas para formar polígonos que forman a la malla.

El algoritmo muy a grosso modo es el siguiente:

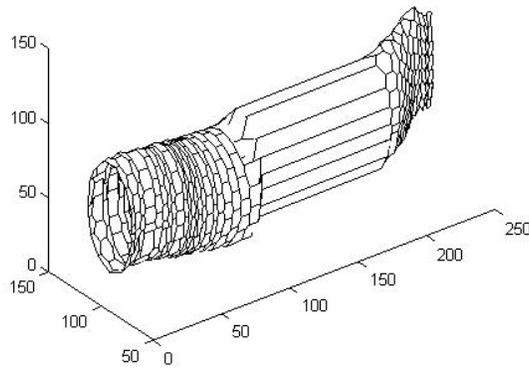
*Para cada sección del canal*

*Obtenga las cuatro listas la sección*

*Agregue a una lista cada uno de los vértices que forman a los polígonos*

*Agregue a una lista cada una de las caras apuntando a la lista de vértices*

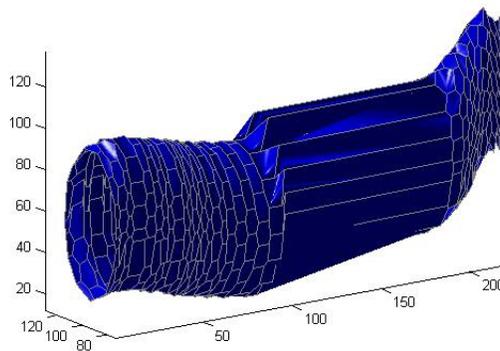
En la siguiente gráfica podemos apreciar el efecto de aplicar el algoritmo de malleo simplex a la reconstrucción con la que hemos venido trabajando.



**Figura 6.12** Reconstrucción de superficie por malleo simplex.

Una reconstrucción hecha a base de polígonos como la de la figura 6.12 es también llamada wireframe, en el contexto de los diseñadores gráficos significa la estructura base, con la cual pueden empezar a trabajar con colores, texturas, posiciones, efectos de iluminación y sombreado. Dentro de nuestro contexto técnico, indica transformaciones rígidas, afines y mundo, algoritmos de recorte de profundidad, efectos de normales, rendering.

En la siguiente gráfica veremos como se comporta la reconstrucción agregando efectos de color y luz.



**Figura 6.13** Agregando color e iluminación al wireframe.

A propósito hemos coloreado cada uno de los contornos del polígono de un tono gris, con el fin de mostrar que, efectivamente se está trabajando con las mallas simplex.

## 7. Avances del proyecto y trabajo futuro

Hasta el momento se ha cumplido de manera puntual cada uno de los tópicos planificados para esta primer entrega de avances. El trabajo a desarrollar en la siguiente etapa seguirá como se planteo desde un inicio.

- ❖ Pruebas y análisis de resultados
- ❖ Desarrollo de modelo de propagación
- ❖ Utilización de bibliotecas de graficación 3D
- ❖ Desarrollo de interfaz gráfica de usuario
- ❖ Artículo
- ❖ Escritura de tesis

Se tiene delineado, como es que se trabajará con cada uno de los puntos, como vemos a continuación:

Las pruebas y análisis de resultados serán realizadas en Matlab.

El modelo de propagación estará basado en el trabajo de Kudo [3], puesto que en su modelo hizo uso de funciones de densidad y dimensión fractal para imágenes en 2D.

Las bibliotecas de graficación serán las de OpenGL con las cuales ya hemos estado trabajando en C++.

La interfaz gráfica de usuario será desarrollado en Visual C++. Para usar el código desarrollado en Matlab se exportarán las funciones a C++ gracias al Matlab Compiler. Ya hemos hecho pruebas donde las bibliotecas interaccionan (MFC, Matlab, OpenGL).

## Bibliografia

- [1] B. H. P. Broks, W. J. M. Brok, J. Remy, J. J. A. M. van der Mullen, A. Benidar, L. Biennier, and F. Salama. Numerical investigation of the discharge characteristics of the pulsed discharge nozzle. *Phys. Rev. E*, Vol. 71, 2005.
- [2] V. Repän, M. Laana and T. Plank, “Electric Field Modelling for Point-Plane Gap” Institute of Experimental Physics and Technology, University of Tartu, Tähe 4, 51010 Tartu, Estonia.
- [3] K. Kudo, “Fractal Analysis of Electrical Trees”, *IEEE Transactions on dielectrics and Electrical Insulation* pp. 713-728, Vol. 5 No. 5, October 1998.
- [4] Reginald D Smith, “The fractal dimension of ionization cascades in the glow discharge” *Journal Of Physics D: Applied Physics*, pp. 1016-1020, 17 March 2005.
- [5] Ute Ebert, Wim van Saarloos and Christiane Caroli, “Streamer Propagation as a Pattern Formation Problem: Planar Fronts”, *Physical Review Letters*, pp. 4178-4181, Vol. 77, No. 20, November 1996
- [6] J Batina, F Noel, S Lachaud, R Peyrous and J F Loiseau, “Hydrodynamical simulation of the electric wind in a cylindrical vessel with positive point-to-plane device”, *Journal Of Physics D: Applied Physics*, pp. 1510-1524, Vol. 34, 2001.
- [7] D B Watson, S K Kho and K A Samuels, “Impulse Flashhover of Air in Divergent Fields”, *J. Phys. D: Appl. Phys.* pp. 1777-1779, Vol. 25, 1992.
- [8] Y. Ehara, M. Naoe, K. Urano, H. Kishida, M. Matsuyama, T. Ito, “Fractal Analysis of the Treeing Process from Luminous Discharge Image and Measurement of Discharge Magnitude”, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, pp. 728-733, Vol. 5 No. 5, Oct. 1998.
- [9] H. Saitoh, K. Morita, T. Kikkawa, N. Hayakawa, H. Okubo, “Impulse Partial Discharge and Breakdown Characteristics of Rod-Plane Gaps in  $N_2/SF_6$ , Gas Mixtures”, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, pp. 544-550, Vol. 9, No. 4; August 2002.
- [10] Sunao Katsuki, Hidenori Akiyama, Amr Abou-Ghazala and Karl H. Schoenbach “Parallel Streamer Discharges Between Wire and Plane Electrodes in Water”, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, pp. 498-506, Vol. 9, No. 4; August 2002.
- [11] M Petit, A Goldman, M Goldman, “Glow currents in a point-to-plane dielectric barrier discharge in the context of the chemical reactivity control”, *J. Phys. D: Appl. Phys.* pp. 2969-2977, Vol. 35, 2002.

- [12] Pierre Tardiveau, Emmanuel Morode, André Agneray, "Tracking an individual streamer branch among others in a pulsed induced discharge", *J. Phys. D: Appl. Phys.* pp. 2823-2829, Vol. 35, 2002.
- [13] Ioana Ene, Cornelia Motoc, Mircea Rusu, "Fractal Models for 2D and 3D Electric Discharge" The First South-East European Symposium on "Interdisciplinary approaches in fractal analysis ", May 7-10, 2003 Bucharest, Romania.
- [14] J. M. K. MacAlpine, D. H. Qiu, "An Analysis of Spark Paths in Air Using 3-Dimensional Image Processing", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, pp. 331-336, Vol. 6 No. 3, June 1999.
- [15] D. H. Qiu, J. M. K. MacAlpine, "An Incremental Analysis of Spark Paths in Air Using 3-dimensional Image Processing", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, pp. 758-763, Vol. 7 No. 6, December 2000.
- [16] Th. Hinterholzer, W. Boeck, "Breakdown in SF6 influenced by Corona-Stabilization", Institute of High Voltage Engineering and Electric Power Transmission, Technical University of Munich, 2001.
- [17] R. Rangel-Kuoppa, C. Avilés-Cruz, J.L. Hernández –Ávila, and R. Escarela-Pérez, "3d Reconstruction of a Spark Discharge" 37th International Universities Power Engineering Conference, Stafford, U.K., 9-11 September 2002, Conference Proceedings, pp. 483-487, Vol. 2.
- [18] Arturo Galván Diego, Raúl Velázquez Sánchez, "Protección contra el efecto de las tormentas eléctricas de estructuras y edificios: conceptos básicos, evolución y aplicación en México", *Boletín Instituto de Investigaciones Eléctricas*, pp. 200-218, septiembre-octubre del 2001.
- [19] U. Ebert and M. Arrayás, "Pattern Formation in Electric Discharges in: Coherent Structures in Complex Systems", p. 270 – 282 eds.: D. Reguera et al., *Lecture Notes in Physics 567* (Springer, Berlin 2001).
- [20] Arturo Galván Diego, Raúl Velázquez Sánchez, "Protección contra el efecto de las tormentas eléctricas de estructuras y edificios: conceptos básicos, evolución y aplicación en México", *Boletín Instituto de Investigaciones Eléctricas*, pp. 200-218, septiembre-octubre del 2001.
- [21] Fausto, Joshua, Holly, Claudio, Gabriel, "The Ball-Pivoting Algorithm for Surface Reconstruction *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 5, No. 4, October-December 2000.
- [22] Hervé Delingette, "General Object Reconstruction based on Simplex Meshes", *International Journal of Computer Vision*, 32, 111\_142 (1999) Kluwer Academic Publishers, Boston. Manufactured in The Netherlands.

- [23] Wolfgang Niem, Marcus Steinmetz, "Camera Viewpoint Control for the Automatic Reconstruction of 3D Objects", SPIE Proceedings, Vol. 2182, 1996.
- [24] Ali Shahrokni, Hamid Soltanian-Zadeh, Reza A. Zoorofi, "Fast Skeletonization Algorithm for 3-D Elongated Objects".
- [25] D B Watson, S K Kho, K A Samuels and S Chee, "Electrical flashover through heated air", J. Phys. D Appl. Phys. pp. 1067-1072 Vol. 26, 1993.
- [26] L. Niemeyer, L. Pietronero, H. J. Weismann "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown", Vol. 52. No. 12, marzo 1984.
- [27] David Yañez Mendoza. Dimensión Fractal de Trayectorias de Descargas Eléctricas en Aire. En Tesis MC. - Instituto Politécnico Nacional.

## Anexo 1. Recursos utilizados

- Tarjeta de adquisición de imágenes
- Electrómetro de alta impedancia de la marca Keithley, modelo 6517.
- Fuente controlada de alta tensión en corriente directa y polaridad positiva (Spellman, modelo SL600, 0-20 kV) .
- Resistencia limitadora de  $57\text{ M}\Omega$  .
- El divisor de tensión resistivo de 40 kV (Punta atenuadora BK-PR28A 1:1000 V).
- Multímetro Fluke